

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”



## POLO DELLE SCIENZE E DELLE TECNOLOGIE FACOLTÀ DI INGEGNERIA

### Dottorato di Ricerca in Ingegneria dei Sistemi Idraulici, di Trasporto e Territoriali – XXII ciclo

Coordinatore: Ch.mo Prof. Ing. Bruno Montella

### TESI DI DOTTORATO

*La Risposta Idraulica di Barriere Sommerse in Campo Non Lineare*

#### **Relatore**

Ch.mo Prof. Ing. Mario Calabrese

#### **Candidato**

Ing. Francesco Ciardulli

#### **Correlatore**

Dott. Ing. Mariano Buccino

**ANNO ACCADEMICO 2008-2009**



*A mia madre Giuliana,  
a mio padre Carmine  
e a mia sorella Valentina*

## Abstract

Submerged breakwaters are a very common structural solution employed for shore erosion control. Predicting wave climate leeward the barriers is indeed the main task to the functional design of such structures; this because it rules the distribution of wave thrusts in the protected area that, in turn, governs hydrodynamic and morphodynamic processes.

In this regard it should be noticed that the interaction between waves and submerged breakwaters is a strongly non-linear process. In fact, when water waves come across the structure, multiple-frequency harmonic wave components arise, generating a transmitted wave field very different from the incident one. The super-harmonics consist of phase-locked waves to the fundamental one plus free waves that travels with their own phase speed in the shadow zone. These components interact leading all kinematic and dynamic quantities to spatially fluctuate behind the structure.

The aim of this work is to investigate the main characteristics of the non-linear interaction between waves and submerged barriers for conditions of both breaking and no-breaking waves over the structure crown. For this purpose a long series of laboratory experiments have been carried out at the small scale wave flume of the Hydraulic, Geotechnical and Environmental Engineering Department (*DIGA*) of University of Naples "Federico II". Models of rubble-mound submerged breakwaters with different geometries and porosity have been employed under the action of regular waves with different height and period. The free surface elevation process has been acquired at several positions leeward of structure models. Experimental results clearly show that the wave shape in the sheltered area is non-permanent leading the profile asymmetry coefficients spatially fluctuate as well as the twice frequency Fourier modes. This behavior, due to the interaction between phase-locked waves and free waves, leads the variance profile (i.e. the spectrum area) to fluctuate in the same way making the definition itself of transmitted wave height quite uncertain. As a further result it has been noticed that higher harmonics transmitted rate reaches a maximum value when waves start breaking over the structure and then, with increasing of dissipation process, to be reduced lying in a saturation curve.

Le barriere sommerse costituiscono una soluzione progettuale frequentemente utilizzata per il controllo dell'erosione costiera. La previsione del clima ondoso dietro le barriere rappresenta certamente l'aspetto principale per la loro progettazione funzionale; questo perché esso regola la distribuzione delle forzanti ondose nell'area protetta le quali, a loro volta, governano i processi idrodinamici e morfodinamici.

A questo riguardo è necessario rilevare che l'interazione tra onde e barriere sommerse è un processo fortemente non lineare. Di fatto, quando le onde si propagano sulla struttura nascono componenti armoniche di frequenza multipla che generano profonde modifiche al campo d'onda trasmesso. Tali super-armoniche sono composte da onde legate in fase alla componente fondamentale and onde libere che si propagano nella zona protetta con celerità indipendente. L'interazione tra queste componenti ondose produce dietro la barriera una oscillazione spaziale di tutte le grandezze cinematiche e dinamiche del moto.

Lo scopo di questo lavoro è analizzare le principali caratteristiche dell'interazione non-lineare tra moto ondoso e barriere sommerse, in condizioni sia di onde frangenti sia di onde non frangenti sul coronamento della struttura. A questo scopo una lunga serie di esperimenti di laboratorio sono stati eseguiti utilizzando il canale ad onde in piccola scala del Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Geotecnica ed Ambientale (*DIGA*) dell'Università di Napoli "Federico II". Sotto l'azione di onde regolari di differenti altezze e periodi, sono stati esaminati modelli fisici di barriere sommerse in massi naturali di differenti geometrie e porosità. I risultati sperimentali mostrano chiaramente come, nella zona d'ombra, le forme del profilo ondoso



siano non permanenti inducendo una fluttuazione dei coefficienti di asimmetria del profilo stesso così come dei modi di Fourier di doppia frequenza. Questo fenomeno, dovuto alla mutua interazione tra le armoniche libere e legate in fase, produce, alla stessa maniera, una variazione spaziale anche della varianza del profilo (cioè dell'area dello spettro) determinando un'incertezza nella definizione stessa di altezza d'onda trasmessa. Come ulteriore risultato, è stato notato che la quantità di super-armoniche generata nel processo di trasmissione attinge un massimo in corrispondenza della prima rottura dell'onda per poi, con l'incremento dei processi dissipativi, ridursi seguendo una curva di saturazione.

## Indice

<b>Introduzione .....</b>	<b>9</b>
<b>Capitolo 1. Onde gravitazionali periodiche su fondale costante .</b>	<b>12</b>
1.1 Formulazione generale del problema differenziale della propagazione di onde monocromatiche su fondale costante .....	12
1.2 Teoria non lineare del moto ondoso .....	16
1.3 Le Onde di Stokes.....	17
1.3.1 Onde di Stokes al primo ordine.....	18
1.3.2 Onde di Stokes al secondo ordine .....	20
1.3.3 Cenni sulle onde di Stokes al terzo ordine.....	22
1.4 Cenni sulla teoria dell'onda cnoidale .....	24
<b>Capitolo 2. Un esempio di sistema non lineare in idraulica marittima: il generatore d'onda .....</b>	<b>26</b>
2.1 Premessa.....	26
2.2 Flick e Guza (1980): "Paddle Generated Waves in Laboratory Channels" .....	26
2.2.1 La soluzione al primo ordine .....	30
2.2.2 La soluzione al secondo ordine .....	34
2.3 Goda (1997): "Recurring Evolution of Water Waves Through Nonresonant Interactions" .....	40
2.4 Madsen (1971): "On the Generation of Long Waves". Soluzione per acque basse.....	47
2.5 Confronto tra le diverse soluzioni .....	51
2.6 Oscillazioni delle ampiezze di Fourier.....	53
<b>Capitolo 3. Le barriere sommerse come sistemi a risposta non lineare.....</b>	<b>59</b>
3.1 Generalità.....	59
3.2 Soluzione teorica di Massel (1983).....	60
3.2.1 La soluzione al primo ordine .....	62
3.2.2 La soluzione al secondo ordine .....	66
3.2.3 Il profilo dell'onda.....	70
3.3 Soluzione di Goda et al. (1999) .....	72
3.3.1 Soluzione al primo ordine .....	74
3.3.2 Soluzione al secondo ordine .....	75
3.3.3 Estensione della soluzione del moto al III ordine .....	76
3.4 Considerazioni conclusive sulle soluzioni teoriche .....	76
3.5 Studio sperimentale di Grue (1992). .....	77
3.6 Studio sperimentale di Losada et al. per ostacolo rettangolare sommerso di porosità variabile .....	83
3.7 Studio sperimentale di Brossard & Chagdali sulla generazione di armoniche libere di alta frequenza in presenza di una piastra sommersa.....	89
<b>Capitolo 4. Analisi sperimentale.....</b>	<b>98</b>
4.1 Generalità.....	98

4.2	Installazione sperimentale .....	98
4.2.1	Il canale ad onde .....	98
4.2.2	Il sistema di generazione .....	99
4.2.3	Il sistema di acquisizione.....	99
4.2.4	L' assorbimento dell'energia ondosa riflessa.....	100
4.3	Dimensionamento dei modelli .....	102
4.3.1	Caratteristiche geometriche dei modelli fisici utilizzati.....	102
4.3.2	Caratteristiche dei materiali impiegati .....	104
4.3.3	Sintesi delle caratteristiche geometriche dei modelli di barriera.....	105
4.4	Caratteristiche del moto ondoso incidente e metodologie di acquisizione dei dati.....	107
4.5	Effetti scala.....	109
4.5.1	Trasmissione.....	110
4.5.2	Frangimento .....	114
<b>Capitolo 5. Trattamento ed analisi del segnale.....</b>		<b>116</b>
5.1	Generalità.....	116
5.2	Schema del processo di trasmissione .....	117
5.3	La stima delle ampiezze di Fourier .....	119
5.3.1	La finestra utile di analisi .....	119
5.3.2	La separazione delle componenti armoniche del segnale .....	122
<b>Capitolo 6. Analisi dei dati sperimentali .....</b>		<b>129</b>
6.1	Generalità.....	129
6.2	Analisi della trasmissione nel dominio del tempo .....	129
6.3	La fluttuazione spaziale delle componenti di Fourier .....	142
6.3.1	Metodologia di stima al secondo ordine .....	146
	Funzione di oscillazione per la frequenza fondamentale ( $\square$ ).....	147
	Funzione di oscillazione per la frequenza $2\square$ .....	149
	Una breve discussione riguardo i criteri di interpolazione adottati.....	151
	Determinazione univoca delle componenti libere e legate .....	153
6.3.2	Confronto con i dati sperimentali .....	154
6.3.3	Estensione alla componente $3\square$ .....	160
6.3.4	Altre possibili metodologie di stima delle componenti in gioco .....	162
6.4	Analisi del processo di trasmissione del moto ondoso.....	163
6.4.1	Generalità sul frangimento del moto ondoso su barriere sommerse: .....	163
	definizioni adottate nel corso di questo studio .....	163
6.4.2	Barriera omogenea a cresta stretta e sommergenza elevata (struttura ..... di riferimento) .....	167
6.4.3	Barriera omogenea a cresta larga e sommergenza elevata .....	182
6.4.4	L'effetto della presenza del nucleo sull'interazione onda-struttura .....	199
6.4.5	L'effetto della pendenza del paramento lato mare.....	216
6.4.6	L'influenza della sommergenza .....	223
<b>Capitolo 7. Analisi e modellazione del processo di trasmissione non lineare</b>		<b>238</b>
7.1	Generalità.....	238

7.2 Il coefficiente di trasmissione globale.....	239
7.2.1 Generalità ed analisi qualitativa dei dati .....	239
7.2.2 Analisi non lineare dell'indice globale di trasmissione ( $K_T$ ).....	243
7.3 Stima della componente non lineare dell'interazione onda- struttura.....	251
7.3.1 La saturazione dell'armonica libera di pulsazione $\square\square$ .....	254
<b>Conclusioni.....</b>	<b>265</b>
<b>Appendice I. Tecniche di laboratorio per il calcolo delle diverse componenti armoniche.....</b>	<b>266</b>
A.1 Tecnica di separazione non lineare a due sonde. Metodo di Grue (1992).....	267
A.2 Tecnica di separazione non lineare a quattro sonde. Metodo di Lin e Huang (2004).....	271
<b>Ringraziamenti .....</b>	<b>277</b>
<b>Lista dei Simboli .....</b>	<b>278</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>280</b>

## Introduzione

Le *barriere distaccate sommerse* sono elementi rigidi di difesa disposti sub-parallelamente alla linea di riva e con la quota di cresta al di sotto del livello medio di progetto. La loro peculiarità è quella di favorire il frangimento delle onde più alte riducendo così il carico idrodinamico sulla spiaggia protetta.

Da un punto di vista planimetrico esse possono essere *continue* (Figura I) o *segmentate* (Figura II), costituite cioè da elementi di barriera alternati a varchi per consentire l'accesso delle imbarcazioni all'area protetta.



Figura I. Barriera sommersa continua (Lido di Ostia, Italia).

Attualmente, con riferimento principalmente ma non solo alle coste italiane, le barriere sommerse costituiscono la sola tipologia accettata di intervento *rigido* di difesa, e sono adoperate spesso in combinazione con interventi di *ripascimento artificiale*. La principale ragione di ciò risiede senz'altro nella loro ridotta intrusione nel paesaggio costiero che consente la salvaguardia delle potenzialità, spesso altissime, dei paesaggi litoranei italiani. A ciò si aggiunga il loro costo relativamente ridotto nonché la loro caratteristica di favorire il ricambio idrico nell'area protetta che, specialmente nei nostri mari a bassa escursione di marea, rappresenta una garanzia di salvaguardia ambientale delle acque e dei sedimenti.



Figura II. Barriera sommersa segmentata

Tuttavia non esiste in pratica un criterio di progettazione di queste opere che possa definirsi "standard". La ragione di tutto questo risiede principalmente nell'incertezza riguardo la risposta morfologica della spiaggia protetta dopo il posizionamento della barriera. Non sono rari infatti i casi nei quali si è riscontrato, a valle dell'impianto della struttura, un tasso di erosione addizionale rispetto al contesto indisturbato.

La ragione principale dei fallimenti risiede senz'altro in una previsione non corretta del campo di moto a tergo dell'opera dovuta sostanzialmente ad una ridotta conoscenza degli effetti macroscopici ed idraulici connessi all'interazione onda-struttura.

Il lavoro di tesi è rivolto all'approfondimento di tale conoscenza con specifico riferimento al processo di trasmissione ondosa ed alle profonde modificazioni delle caratteristiche ondose a tergo delle strutture che da esso ne derivano.

Nel corso degli ultimi sessanta/settanta anni la maggior parte degli studiosi ha trattato il fenomeno con specifico riferimento alla riduzione di energia dell'onda incidente, prevalentemente indotta dal frangimento. I numerosi studi presenti in letteratura hanno consentito di approfondire i principali caratteri della trasmissione ondosa e di formulare diverse relazioni empiriche e semi-empiriche per la valutazione del coefficiente di trasmissione  $K_T$ , inteso come rapporto tra l'energia del moto ondoso trasmesso alle spalle dell'opera e quella del moto ondoso incidente.

Nelle pratiche applicazioni, dunque, il fenomeno della trasmissione viene tenuto in conto soltanto attraverso la valutazione del contenuto energetico totale trasferito dietro la struttura. Tale approccio è, però, implicitamente "lineare" poiché si immagina che il campo d'onda a tergo della barriera sia semplicemente scalato del fattore di riduzione  $K_T$ .

Diversi studi teorici e sperimentali hanno, invece, evidenziato come l'interazione onda-barriera sommerse sia un processo fortemente non lineare che induce profonde alterazioni del profilo ondoso incidente e della distribuzione in frequenza dell'energia ondosa trasmessa. In effetti, il passaggio dell'onda sul coronamento della struttura favorisce la generazione di armoniche di frequenza multipla rispetto alla principale; queste sono costituite da una parte legata in fase alla fondamentale e da un'altra libera di propagarsi con celerità indipendente. La loro interazione produce una variazione spaziale delle forme d'onda e delle caratteristiche spettrali.

Le conseguenze dirette di tale fenomeno sui processi idrodinamici costieri non sono ben conosciute. È chiaro comunque che soltanto una profonda e dettagliata analisi delle principali caratteristiche che lo governano potrebbe condurre a valutazioni approfondite degli effetti sui processi dinamici che interessano la zona protetta dalle barriere.

La maggior parte dei lavori disponibili in letteratura si riferiscono a situazioni semplificate; gli studi teorici, ad esempio, chiariscono esclusivamente la natura del meccanismo non lineare di interazione onda-barriera in assenza di frangimento, mentre quelli sperimentali analizzano semplici modelli di strutture e, comunque, non trattano in maniera sistematica gli effetti indotti dal frangimento che, coerentemente con le finalità progettuali, hanno luogo sul coronamento per la maggior parte dei casi.

L'obiettivo principale del presente lavoro di tesi è stato quello di analizzare, prevalentemente per via sperimentale, le principali caratteristiche dei processi non lineari che hanno luogo in presenza di barriere sommerse descrivendo in dettaglio il fenomeno sia nel dominio del tempo che in quello delle frequenze. A tal fine è stata eseguita un'indagine di laboratorio adoperando diversi modelli fisici di scogliere sommerse in massi naturali variandone i parametri progettuali in coerenza con la loro rappresentatività nei confronti di situazioni reali. Sono state indagate condizioni di onda frangente e non frangente sulla cresta dell'opera provando a correlare i caratteri macroscopici del processo di trasmissione con la risposta idraulica non lineare delle barriere.

Il lavoro si propone inoltre di fornire indicazioni di primo tentativo riguardo la previsione delle caratteristiche non lineari del moto ondoso trasmesso mediante delle equazioni di carattere empirico. Lo scopo di quest'ultima parte della ricerca è quello di indicare una possibile alternativa per la ricostruzione del moto ondoso alle spalle dell'opera che, rispetto all'utilizzo del solo coefficiente di trasmissione, riproduca più fedelmente la forma del profilo trasmesso consentendo così un calcolo più affidabile delle caratteristiche idrauliche di interesse.

Per quanto riguarda la struttura della Tesi, questa è costituita da una prima parte (Capitolo 1 e 2) che rappresenta un'introduzione teorica al fenomeno studiato. Si formula il problema differenziale della propagazione di un'onda regolare su fondale costante fornendo le soluzioni fino al II ordine di approssimazione (Teoria di Stokes al II ordine) e si analizza in dettaglio la teoria del generatore d'onda a pistone che rappresenta un esempio in idraulica marittima di sistema a risposta non lineare. I risultati di tale teoria aiutano a comprendere il fenomeno da un punto di vista qualitativo e rappresenteranno un termine di paragone costante nel corso di questo lavoro.

Nel Capitolo 3 si ripercorrono tutti gli studi più rappresentativi, teorici e sperimentali, sulle barriere sommerse come sistemi a risposta non-lineare.

Dopo l'introduzione teorica e la descrizione del fenomeno con ampi riferimenti allo stato dell'arte in letteratura, un intero capitolo della Tesi (Capitolo 4) descrive in dettaglio l'attività sperimentale eseguita e le attrezzature utilizzate. Le prove di laboratorio sono state effettuate nel canale ad onde in piccola scala del Laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Geotecnica ed Ambientale dell'Università di Napoli "Federico II".

Il Capitolo 5 è dedicato esclusivamente alla descrizione delle metodologie di analisi dei segnali d'onda registrati durante le prove sperimentali.

Nel Capitolo 6 si discutono dettagliatamente i risultati sperimentali per ogni configurazione strutturale incrociando i dati misurati dalle registrazioni in canale con immagini video del processo di interazione onda-struttura con particolare dettaglio al processo di frangimento.

Si conclude con il Capitolo 7 proponendo un approccio non lineare per l'analisi e la ricostruzione del campo d'onda trasmesso a tergo delle barriere.

## Capitolo 1. Onde gravitazionali periodiche su fondale costante

### 1.1 Formulazione generale del problema differenziale della propagazione di onde monocromatiche su fondale costante

La descrizione della propagazione di un'onda periodica su fondale costante si riconduce alla formulazione di un sistema di equazioni differenziali la cui soluzione è ottenibile una volta definite una serie di condizioni di congruenza poste sui contorni del campo di moto. La soluzione di questo problema generale rappresenta il punto di partenza per lo studio di problemi più complessi molto comuni nell'idraulica marittima, in cui l'onda si propaga su fondali variabili e/o in presenza di discontinuità. In questa parte del lavoro si formulerà il problema del moto attraverso un approccio semplificato per poter creare un modello applicabile in campo ingegneristico. Il moto ondoso sarà rappresentato da un'onda monocromatica con lunghezza di cresta infinita, affrontando quindi il problema per il caso bidimensionale. Si assume valida l'ipotesi di moto irrotazionale, di fluido ideale, omogeneo e incompressibile; saranno trascurati inoltre gli effetti conseguenti alle forze di Coriolis, alle tensioni superficiali e alla presenza di correnti esterne. Infine supporremo il fondo rigido, piano e impermeabile. In Figura 1.1 si riporta lo schema del campo di moto in cui il sistema di riferimento è preso con asse  $x$  coincidente con la direzione di propagazione dell'onda ed asse  $z$  verticale con origine in corrispondenza del livello di quiete. Il piano  $(x,z)$  è, in virtù dell'ipotesi di bidimensionalità, un piano di simmetria.

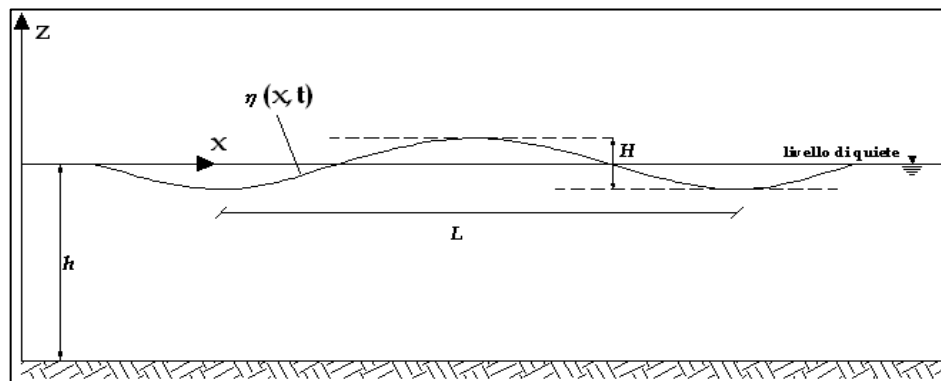


Figura 1.1. Schematizzazione del dominio spaziale bidimensionale del campo di moto.

La fluttuazione della superficie libera è descritta dalla funzione incognita  $\eta(x, t)$  ed  $h$  è la profondità del fondale. Dalla Figura 1.1 possiamo trarre le definizioni di alcuni parametri fondamentali. La distanza verticale tra la cresta ed il cavo dell'onda, solitamente indicata con  $H$ , è definita altezza dell'onda. La distanza orizzontale, calcolata nel dominio dello spazio, tra due punti di egual fase è definita lunghezza d'onda  $L$ . Analogamente la stessa distanza, calcolata nel dominio del tempo, è invece definita periodo dell'onda  $T$ .



L'ipotesi di irrotazionalità consente, una volta definite  $u(x, z, t)$  e  $w(x, z, t)$  le componenti, rispettivamente lungo  $x$  e lungo  $z$ , del vettore velocità  $\vec{v}(x, z, t)$ , di definire in ogni punto del campo di moto una funzione scalare  $\Phi(x, z, t)$ , definita potenziale di velocità, tale che:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases} \quad [1.1]$$

Ovvero

$$\nabla \Phi = \vec{v} \quad [1.2]$$

A questo punto il moto sarà completamente descritto dall'equazione di continuità (principio di conservazione della massa), dall'equazione del moto (principio di conservazione della quantità di moto) e dalle condizioni al contorno cinematiche e dinamiche.

Nell'ipotesi di irrotazionalità e di incomprimibilità del fluido il bilancio della massa si esprime attraverso l'equazione di Laplace:

$$\nabla \nabla \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad [1.3]$$

L'equazione del moto è invece rappresentata dalla ben conosciuta equazione di Bernoulli generalizzata:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t)^1 \quad [1.4]$$

Nella [1.4]  $p$  rappresenta la pressione totale e  $\rho$  la densità del fluido. Nella formulazione generale che in questo paragrafo si riporta, il contorno del fluido è delimitato verticalmente dal fondo e dalla superficie libera mentre lateralmente lo si considera esteso infinitamente. Di conseguenza le condizioni al contorno saranno imposte sulle due superfici di separazione precedentemente citate.

La condizione al contorno sul fondo è di carattere cinematico; congruentemente con l'ipotesi di fondo impermeabile il vettore velocità per  $z = -h$  sarà diretto parallelamente al fondo. Per fondale costante la precedente si esprime con la relazione seguente:

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \right]_{z=-h} \quad [1.5]$$

---

<sup>1</sup> La costante  $C(t)$  è una funzione generica del tempo. L'equazione [1.4] può essere scritta nella forma  $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} [\Phi - \int C(t) dt] = 0$ . D'ora in avanti, pensando la costante inclusa nel potenziale faremo riferimento all'equazione di Bernoulli considerando  $C(t) = 0$ .

Sulla superficie libera si impongono, invece, due condizioni al contorno; una di carattere cinematico ed una di carattere dinamico. Per quanto riguarda la condizione cinematica, essendo la superficie libera una superficie di frontiera del dominio di integrazione, per definizione, non può essere attraversata da materia durante il moto. Ciò è vero se la componente del vettore velocità ortogonale alla superficie di separazione uguaglia la componente di velocità della superficie stessa nella medesima direzione. Tale concetto, indicando con  $F(x,z,t) = z - \eta(x,y) = 0$  il luogo dei punti che descrivono la superficie libera, si esprime imponendo che  $dF/dt$  sia uguale a zero sulla superficie libera. È semplice verificare che tale imposizione porta alla seguente espressione:

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{z=\eta(x,t)} \quad [1.6]$$

La condizione dinamica esprime invece che il valore della pressione sia costante e pari alla pressione atmosferica in tutti i punti della superficie libera. La condizione si esprime attraverso l'equazione di Bernoulli; considerando  $p_{\text{atm}} = 0$  si ha:

$$\left[ \eta + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \right]_{z=\eta(x,t)} \quad [1.7]$$

Oltre alle tre precedenti condizioni al contorno è necessario formulare altre due condizioni dette di regolarità del campo di moto le quali esprimono in che maniera l'onda si propaga nello spazio e nel tempo. Le espressioni sono le seguenti:

$$\begin{cases} \Phi(x, z, t) = \Phi(x + L, z, t) \\ \Phi(x, z, t) = \Phi(x, z, t + T) \end{cases} \quad [1.8]$$

Come ripetuto più volte la formulazione qui riportata rappresenta un caso del tutto generale; il sistema di equazioni composto dalla [1.3], [1.4] e dalle tre condizioni al contorno può essere ulteriormente particularizzato per casi di studio più complessi. Di fatto, nei casi più simili alle condizioni di moto reali, i contorni laterali del fluido variano a seconda del particolare problema di propagazione che si vuole studiare e delle caratteristiche geometriche del campo di moto. In molti casi, per risolvere il problema del moto, è necessario aggiungere ulteriori condizioni in punti di discontinuità del campo, ai contorni geometrici del dominio spaziale o in quelli del dominio temporale.

La risoluzione dell'equazione di continuità, con l'ausilio delle necessarie condizioni al contorno, fornisce l'espressione del potenziale di velocità  $\Phi(x,z,t)$ . Una volta determinata la funzione potenziale, la [1.4] fornisce la distribuzione delle pressioni in tutto il campo di moto e a variare del tempo.

Osservando il sistema di equazioni che regge il problema del moto sin qui analizzato, è possibile notare come esso sia non lineare nelle incognite  $\Phi$  ed  $\eta$ . Inoltre, con l'eccezione della condizione al contorno espressa sul fondo, quelle imposte sulla superficie libera sono espresse in forma implicita, essendo la funzione  $\eta(x,t)$ , che esprime il profilo dell'onda, una superficie incognita. Tali complicazioni, insite nella natura del problema differenziale, rendono la soluzione del sistema di notevole difficoltà analitica.

Per quel che concerne le equazioni al contorno, si ricorre ad uno sviluppo in serie di Mac Laurin (serie di Taylor con punto iniziale zero) delle funzioni che compaiono in tali espressioni. In tale maniera le condizioni cinematica e dinamica sulla superficie libera possono essere espresse nella seguente maniera:

$$\left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \right\}_{z=0} \cdot \eta + \dots = 0 \quad [1.9]$$

$$g\eta + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}_{z=0} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\} \cdot \eta + \dots = 0 \quad [1.10]$$

Nelle espressioni [1.9] ed [1.10] è possibile eliminare i termini ritenuti trascurabili ottenendo soluzioni approssimate del problema differenziale. Un eventuale troncamento, ad esempio, delle precedenti espressioni al primo ordine di approssimazione semplificherebbe notevolmente il problema. L'accettabilità di tali semplificazioni è legata alle caratteristiche fisiche del problema che si vuole studiare.

Nonostante l'introduzione del precedente artificio matematico, necessario a rendere esplicite le condizioni al contorno, la soluzione per via analitica del sistema di equazioni differenziali permane di notevole difficoltà stante la sua non linearità.

La soluzione del problema differenziale può essere ottenuta adoperando la cosiddetta *tecnica perturbativa*. Si assume che le incognite del problema possano essere espresse in serie di potenze di un parametro piccolo  $\varepsilon$  detto appunto parametro perturbativo:

$$v = \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \varepsilon^3 v^{(3)} + \dots \varepsilon^{n-1} v^{(n-1)} + \dots \quad [1.11]$$

$$\eta = \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \varepsilon^3 \eta^{(3)} + \dots \varepsilon^{n-1} \eta^{(n-1)} + \dots \quad [1.12]$$

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \varepsilon^3 \Phi^{(3)} + \dots \varepsilon^{n-1} \Phi^{(n-1)} + \dots \quad [1.13]$$

$$p + \rho g z = \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)} + \dots \varepsilon^{n-1} p^{(n-1)} + \dots \quad [1.14]$$

Dove  $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)}$  e  $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n)}$ , sono tutte funzioni del medesimo ordine di grandezza; ogni addendo della sommatoria rappresenta, però, una quantità più piccola della precedente per un fattore di ordine  $\varepsilon$ .

Dal momento che  $\varepsilon$  è solitamente un parametro piccolo è possibile considerare soluzioni approssimate trascurando le potenze di  $\varepsilon$  superiori ad un certo grado. Si ottengono così, soluzioni al primo, al secondo, al terzo grado e così via.

## 1.2 Teoria non lineare del moto ondoso

Come è noto, anche quando ci si limita al caso di onde di oscillazione regolari, cioè di moto ondoso caratterizzato nel dominio del tempo da profili di forma permanente, non esiste una formulazione matematica capace di fornire una soluzione generale del problema. Infatti, nella risoluzione delle equazioni di base, che descrivono in termini differenziali le condizioni di bilancio di masse e le condizioni al contorno, è sempre necessario introdurre alcune semplificazioni attraverso le quali vengono evidenziate alcune caratteristiche del tipo di onde analizzate trascurandone altre di minore importanza.

In realtà, come già sottolineato nel precedente paragrafo, le complicazioni nascono dal fatto che uno dei contorni del campo di moto, e cioè la superficie libera, viene ad essere descritto da una funzione incognita e che le condizioni su tale contorno, sia di tipo cinematica che dinamico, sono non lineari.

Le semplificazioni introdotte riguardano le proprietà meccaniche e le caratteristiche globali delle onde (in genere i rapporti  $H/L$  e  $H/h$ ).

Dette caratteristiche intervengono come parametri che misurano gli effetti di non linearità, legati all'importanza relativa dei termini dell'inerzia convettiva rispetto a quella locale.

Le teorie utilizzate per rappresentare il moto ondoso regolare sono numerose, e talvolta, differenti tra di loro solo per qualche particolare caratterizzazione fisica di una delle grandezze in gioco nelle equazioni differenziali di base che governano il problema.

In linea generale, tra i vari criteri approssimati di soluzione, viene eseguita la suddivisione in due grandi famiglie:

- Le *onde lineari* (dette anche *onde di piccola altezza*);
- Le *onde non lineari* (dette anche *onde di acqua bassa* o *shallow water waves*).

Le onde lineari possono essere descritte specificando due soli parametri dimensionali: la *ripidità dell'onda*  $H/L$  e la *profondità relativa*  $h/L$ . In particolare tramite la *profondità relativa* si può stabilire se le onde sono o meno dispersive e se la celerità, la lunghezza e l'altezza dell'onda sono o meno influenzate dalla profondità dell'acqua. Viceversa tramite la *ripidità* si può stabilire se l'assunzione di onda lineare è o meno valida. Elevati valori della ripidità suggeriscono che l'ipotesi di piccola ampiezza può essere messa in discussione.

Le teorie non lineari danno luogo a diversi modelli di soluzione in funzione dei valori assunti dal rapporto  $H/h$  e dal *numero di Ursell* ( $Ur$ ) definito come segue:

$$Ur = \frac{HL^2}{h^3} \quad [1.15]$$

Il valore assunto da tale parametro è spesso utilizzato per selezionare una teoria adatta a descrivere un'onda di  $L$  e  $H$  (oppure  $T$  e  $H$ ) note, ad una certa profondità  $h$ . Elevati

valori del numero di Ursell indicano un'onda lunga e di ampiezza finita in acque basse che necessita dunque dell'utilizzo di una teoria non lineare.

Nell'ipotesi di fluido perfetto e moto irrotazionale si possono distinguere, sostanzialmente, tre modelli principali di onde:

- Nel caso in cui vale che  $H/h \ll 1$  e  $Ur < 10$  è applicabile la teoria di Stokes;
- Nel caso in cui  $H/h < 1$  e  $Ur > 10$  si ricade nel campo di onde di acqua bassa (shallow water). In queste condizioni, la soluzione individuata da Korteweg e De Vries è denominata teoria delle onde cnoidali;
- Nel caso in cui  $H/h \gg 1$ , si è in condizioni di acqua molto bassa. In tal caso la soluzione è fornita dalle espressioni della teoria dell'onda lunga non lineare (*long wave theory*).

Alla luce di quanto detto, per ciascuna teoria ondosa è possibile definire un campo di validità, nel quale le ipotesi assunte nella formulazione matematica possono essere ritenute significative dal punto di vista fisico.

### 1.3 Le Onde di Stokes

Nella teoria sviluppata da Stokes il parametro perturbativo è rappresentato da  $\varepsilon \simeq a/L$ . Tale parametro è proporzionale al rapporto tra l'ampiezza dell'onda e la sua lunghezza e tende ad essere  $\ll 1$  per onde prossime alla condizione di linearità.

In questo lavoro è stata affrontata la teoria di Stokes al I e II ordine di approssimazione. Di conseguenza le potenze del parametro  $\varepsilon$  comprenderanno i termini fino al secondo ordine. Avremo quindi:

$$v = \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} \quad [1.16]$$

$$\eta = \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} \quad [1.17]$$

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} \quad [1.18]$$

$$p + \rho g z = \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} \quad [1.19]$$

A questo punto sostituendo le precedenti relazioni nelle equazioni della continuità, del moto e in quelle esprimenti le condizioni al contorno otteniamo:

$$\nabla \nabla (\varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}) = 0 \quad [1.20]$$

$$\varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \frac{\rho}{2} [\varepsilon^2 (v^{(1)})^2 + \varepsilon^4 (v^{(2)})^2] + \rho \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}] = 0 \quad [1.21]$$

$$\varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + \left[ \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} \right) \cdot \left( \varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x} \right) - \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right) \right]_{z=0} +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} \right) \cdot \left( \varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x} \right) - \left( \varepsilon \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right) \right] \right\}_{z=0} \cdot (\varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)}) + \dots = 0 \quad [1.22]$$

$$g(\varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)}) + \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon^2 (v^{(1)})^2 + \varepsilon^4 (v^{(2)})^2) + \varepsilon \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} \right]_{z=0} + \\ + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon^2 (v^{(1)})^2 + \varepsilon^4 (v^{(2)})^2) + \varepsilon \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} \right] \right\}_{z=0} \cdot (\varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)}) + \dots = 0 \quad [1.23]$$

In tal modo diventa possibile ottenere progressivamente soluzioni di ordine superiore ognuna espressa in funzione della soluzione precedente.

A questo punto resta da scrivere la condizione al contorno calcolata sul fondo che nella sua forma generalizzata assume il seguente aspetto:

$$\left[ \varepsilon \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0 \quad [1.24]$$

Le equazioni così scritte possono essere diversamente sviluppate e raggruppate algebricamente a seconda dell'ordine di approssimazione richiesto, fornendo quindi nei differenti casi diverse soluzioni del moto.

Di qui a seguire andremo ad analizzare le precedenti equazioni e le relative soluzioni in tutti e due i casi, ovvero al primo e al secondo ordine di approssimazione; si forniranno infine dei cenni sul III ordine con la relativa soluzione.

### 1.3.1 Onde di Stokes al primo ordine

La soluzione di Stokes al primo ordine rappresenta una soluzione esatta della teoria generale nel caso in cui si possano trascurare i termini dell'inerzia convettiva.

Tale teoria è evidentemente valida allorché i rapporti  $H/L$  e  $H/h$  sono piccoli, ossia nel caso di onde di piccola ampiezza. In tali ipotesi, può considerarsi che la posizione della superficie libera sia coincidente con il livello di quiete e che i valori di  $\eta$  e  $\vec{v}$  siano così piccoli da poterne trascurare i termini non lineari.

In questo caso, trascurando i termini del secondo ordine, le equazioni della continuità e del moto assumeranno la forma:

$$\nabla \nabla \Phi^{(1)} = 0 \quad [1.25]$$

$$p^{(1)} + \rho \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} = 0 \quad [1.26]$$

la condizione dinamica e cinematica sulla superficie libera:

$$g\eta^{(1)} + \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \right]_{z=0} = 0 \quad [1.27]$$

$$\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} - \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad [1.28]$$

che insieme danno luogo ad un'unica relazione del tipo:

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad [1.29]$$

Infine la condizione al contorno sul fondo può essere scritta come segue:

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0 \quad [1.30]$$

Come soluzione del primo gruppo di equazioni, scegliamo il moto del primo ordine di un'onda progressiva dove  $\Phi$  rappresenta il potenziale su cui si regge il moto ed  $\eta$  l'involuppo di tutte le posizioni assunte dalla superficie perturbata nel tempo; le loro rispettive espressioni sono le seguenti:

$$\Phi = \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_1(h+z)]}{\cosh(k_1 h)} \cdot \sin(k_1 x - \omega t) \quad [1.31]$$

$$\eta = a \cdot \cos(k_1 x - \omega t) \quad [1.32]$$

in cui  $a$  rappresenta l'ampiezza dell'onda  $\left[ a = \frac{H}{2} \right]$ ,  $k_1$  il numero d'onda  $\left[ k_1 = \frac{2\pi}{L} \right]$  e  $\omega$  la frequenza angolare  $\left[ \omega = \frac{2\pi}{T} \right]$ .

Applicando la condizione cinematica sulla superficie libera è possibile, dopo alcuni passaggi, ricavare la seguente espressione:

$$\omega^2 = gk \cdot \tanh(k_1 h) \quad [1.33]$$

La [1.33] è detta legge di dispersione lineare e stabilisce il legame tra frequenza e lunghezza d'onda al variare della profondità del fondale. Il rapporto tra lunghezza d'onda e periodo prende il nome di celerità di fase, e rappresenta la velocità con cui l'onda si propaga:

$$c = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k_1} \quad [1.34]$$

Dall'esame della soluzione ottenuta è possibile evidenziare alcuni aspetti caratteristici del moto ondoso lineare, che qui si vogliono segnalare.

Il primo aspetto è il carattere puramente oscillatorio del moto. La [1.32] mostra che la media nel periodo dello spostamento della superficie libera lungo la verticale è nullo, ovvero il livello medio coincide con il livello di quiete corrispondente all'assenza di onda. È possibile far vedere che tale proprietà vale per tutte le altre grandezze caratteristiche del campo di moto (velocità, pressione, etc.); una importante conseguenza di ciò è il fatto che il moto ondoso non dà luogo, mediamente, a trasporto di massa.

Il secondo aspetto è che il profilo dell'onda è esprimibile come una singola funzione armonica di frequenza assegnata, pari alla frequenza dell'onda, alla quale corrisponde, secondo la relazione di dispersione, un unico valore della lunghezza d'onda. Tale circostanza si esprime, in analogia con la teoria ondulatoria della luce, con l'affermazione che l'onda è monocromatica.

Dall'espressione del potenziale di velocità è possibile ricavare tutte le grandezze fisiche che descrivono il moto. È utile fare cenno ad alcune grandezze integrali importanti per la completezza della descrizione.

Considerando una colonna di altezza pari alla profondità del fondale e di sezione unitaria, si definisce densità media (nel periodo dell'onda) di energia meccanica, contenuta in tale cilindro, la grandezza:

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad [1.35]$$

L'energia ondosa, trasmessa attraverso il volume di controllo descritto mediamente nel periodo, rappresenta il flusso di energia medio e si indica come segue:

$$P = E c_g = E \cdot \frac{c}{2} \left[ 1 + \frac{2k_1 h}{\sinh(2k_1 h)} \right] \quad [1.36]$$

Il termine  $c_g$  è definita celerità di gruppo e rappresenta la velocità con cui si propaga l'energia.

### 1.3.2 Onde di Stokes al secondo ordine

In questo caso, assumendo valido il precedente gruppo di equazioni al primo ordine, il moto dovrà soddisfare le seguenti relazioni:

$$\nabla \nabla \phi^{(2)} = 0 \quad [1.37]$$



$$p^{(2)} + \frac{\rho}{2}(v^{(1)})^2 + \rho \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} = 0 \quad [1.38]$$

$$g\eta^{(2)} + \left[ \frac{1}{2}(v^{(1)})^2 + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} \right]_{z=0} + \eta^{(1)} \left[ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t \partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad [1.39]$$

$$\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=0} - \eta^{(1)} \left[ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \right]_{z=0} = 0 \quad [1.40]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0 \quad [1.41]$$

Applicando una serie di elaborazioni analitiche al sistema di equazioni sopra scritto, di cui non si riportano i passaggi per brevità, si giunge alla soluzione del moto al secondo ordine di approssimazione. Si evidenzia che, a differenza di quanto si verifica al primo ordine, il problema al secondo ordine è non omogeneo. La soluzione del moto di un'onda progressiva del secondo ordine è rappresentata dalle seguenti espressioni esprimenti rispettivamente il potenziale e l'involuppo della superficie libera:

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) = & \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_1(h+z)]}{\cosh(k_1h)} \cdot \sin(k_1x - \omega t) + \\ & + \frac{3}{8}(k_1a) \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[2k_1(h+z)]}{\sinh^3(2k_1h)\cosh(kh)} \cdot \sin[2(k_1x - \omega t)] \end{aligned} \quad [1.42]$$

$$\eta(x, t) = a \cos(k_1x - \omega t) + (k_1a) a \frac{\cosh(k_1h)[2 + \cosh 2k_1h]}{4\sinh^3(k_1h)} \cos[2(k_1x - \omega t)] \quad [1.43]$$

Osservando la [1.43] appare chiaro come il profilo dell'onda risulti dalla sovrapposizione di due armoniche. La prima, detta armonica principale, ha frequenza  $\omega$  e rappresenta la soluzione al primo ordine; la seconda, con frequenza  $2\omega$ , rappresenta invece la soluzione al secondo ordine. Le due armoniche, oltre a presentare la stessa fase iniziale (assunta in questo caso pari a zero essendo arbitraria la scelta dell'origine dei tempi e delle ascisse), si propagano alla stessa celerità, la quale, per la relazione di dispersione lineare, dipende dall'armonica principale. Tali condizioni rendono la seconda componente armonica legata alla prima. È ricorrente, infatti, in letteratura denominare l'armonica di ordine secondo *bound wave*.

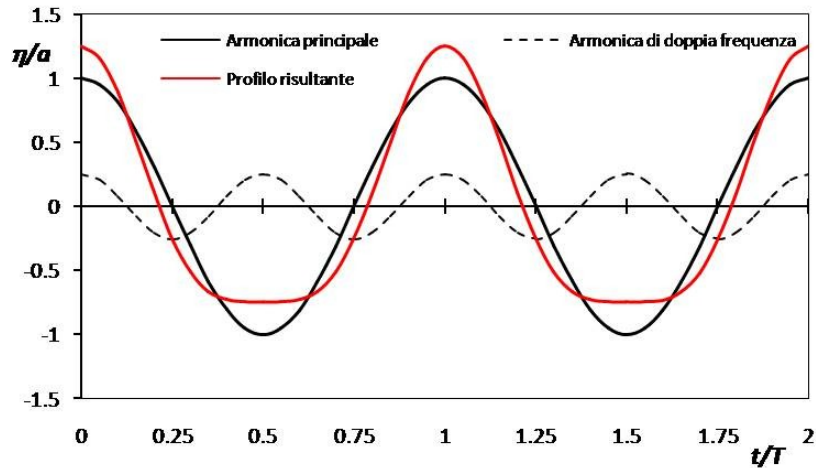


Figura 1.2 – Onda di Stokes del II ordine.

Osservando la Figura 1.2, dove sono rappresentate le armoniche di diversa frequenza e la loro risultante, è possibile notare come un'onda di Stokes del II ordine, contrariamente a quella del I ordine, presenti un profilo asimmetrico rispetto al piano orizzontale. La presenza delle due armoniche produce valori del profilo più elevati in corrispondenza delle creste e minori nei cavi. La conseguenza diretta di ciò è che il valore medio dell'oscillazione non coincide con la superficie di quiete, ma è sopraelevato rispetto ad essa di una quantità pari:

$$\bar{\eta} = k_1 a^2 \frac{\cosh(k_1 h) [2 + \cosh 2k_1 h]}{4 \sinh^3(k_1 h)} \quad [1.44]$$

La [1.44] si ottiene mediando la [1.43] nel periodo.

Analogamente a quanto accade al profilo dell'onda, anche le altre grandezze del moto presentano media diversa da zero. In particolare, ricavando le espressioni delle velocità e mediandole nel periodo, è possibile verificare che la particella fluida subisce uno spostamento netto nella direzione di propagazione dell'onda. Tale fatto rende le onde di Stokes II non più puramente oscillatorie, ma introduce una componente di trasporto di massa netta nel periodo (*Stokes drift*).

Le espressioni del flusso di energia e della celerità di gruppo coincidono con quelle ottenute per l'onda lineare.

### 1.3.3 Cenni sulle onde di Stokes al terzo ordine

Per ricavare la soluzione di Stokes al terzo ordine di approssimazione si può seguire un procedimento analogo a quello relativo alle soluzioni degli ordini inferiori, arrestando le serie di potenze, che esprimono le incognite, al terzo ordine.

Si riporta di seguito la soluzione al III ordine evidenziandone le principali caratteristiche.

Il potenziale di velocità assume la seguente forma:

$$\begin{aligned}\Phi(x, z, t) = & \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_1(h+z)]}{\cosh(k_1h)} \cdot \sin(k_1x - \omega t) + \\ & + \frac{3}{8}(k_1a) \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[2k_1(h+z)]}{\sinh^3(2k_1h)\cosh(k_1h)} \cdot \sin[2(k_1x - \omega t)] \\ & + (k_1a)^2 \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{[11 - 2\cosh(2k_1h)]\cosh[3k_1(h+z)]}{64 \cdot \sinh^6(k_1h)\cosh(k_1h)} \cdot \sin[3(k_1x - \omega t)]\end{aligned}\quad [1.45]$$

Il profilo dell'onda è espresso dalla seguente funzione:

$$\begin{aligned}\eta(x, t) = & a \cos(k_1x - \omega t) + (k_1a)a \frac{\cosh(k_1h)[2 + \cosh 2k_1h]}{4\sinh^3(k_1h)} \cos[2(k_1x - \omega t)] + \\ & + (k_1a)^2 a \frac{3 + 24\cosh^6(k_1h)}{64\sinh^6(k_1h)} \cos[3(k_1x - \omega t)]\end{aligned}\quad [1.46]$$

L'altezza dell'onda risultante risulta legata all'ampiezza della prima armonica dalla relazione seguente:

$$H = 2a \left[ 1 + (k_1a)^2 \cdot \frac{3 + 24\cosh^6(k_1h)}{64\sinh^6(k_1h)} \right] \quad [1.47]$$

La relazione di dispersione al terzo ordine non è più lineare ed assume la seguente forma:

$$\omega^2 = gk \cdot \tanh(k_1h) \left[ 1 + (k_1a)^2 \cdot \frac{8 + \cosh(4k_1h)}{8 \sinh^4(k_1h)} \right] \quad [1.48]$$

In virtù della [1.48] la celerità dell'onda dipenderà tanto dalla frequenza quanto dall'altezza d'onda.

Il profilo dell'onda risultante deriva dalla sovrapposizione di tre diverse armoniche di frequenze  $\omega$ ,  $2\omega$  e  $3\omega$ . Anche la terza armonica, come la seconda, è una *bound wave*.

L'espressione esprime la densità di energia meccanica differisce da quella vista per gli ordini inferiori. Calcolando tale quantità come somma di energia potenziale e cinetica si ottiene:

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2 \left[ 1 + (k_1a)^2 \frac{72 \cosh(k_1h) + 48 \cosh^4(k_1h) + 12 \cosh^2(2k_1h) - 9}{64 \sinh^6(k_1h)} \right] \quad [1.49]$$

Anche l'espressione del flusso di energia è differente da quella vista in precedenza. Avremo in questo caso:

$$P = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{c}{2} \left\{ 1 + \frac{2k_1 h}{\sinh 2k_1 h} + (k_1 a)^2 \frac{[9 + 2 \sinh^2(2k_1 h)][1 + 2kh/\sinh(2k_1 h)]}{8 \sinh^6(k_1 h)} \right\} +$$

$$-(k_1 a)^2 \frac{7 + 12 \cosh^2(k_1 h)}{8 \sinh^4(k_1 h)} \quad [1.50]$$

#### 1.4 Cenni sulla teoria dell'onda cnoidale

Nel 1985 Korteweg e De Vries svilupparono tale teoria che è applicabile ad onde di ampiezza finita in acque basse e tiene conto sia degli effetti della non linearità che della dispersione. Tale teoria è formulata in termini di *funzione jacobiana ellittica*, *cn*, da cui il nome cnoidale. L'onda cnoidale è un'onda periodica caratterizzata da creste appuntite separate da cavi larghi e appiattiti.

Approssimativamente il campo di validità dell'onda cnoidale è  $h/L < 1/8$  quando il numero di Ursell  $Ur > 20$ . Quando la lunghezza d'onda tende a divenire infinita, la teoria dell'onda cnoidale si riduce alla teoria dell'onda solitaria. Quando, invece, il rapporto tra l'altezza dell'onda e la profondità dell'acqua diventa piccolo (onda di altezza infinitesima), il profilo dell'onda si avvicina al profilo sinusoidale descritto dalla teoria lineare.

In letteratura esistono varie teorie di onde cnoidali di diverso ordine di approssimazione.

Al primo ordine di approssimazione si ricordano gli studi di Patterson (1940), Keller (1948) e di Latoine (1961).

Latoine (1961) e Chappelar (1962) hanno fornito la soluzione al secondo ordine di approssimazione.

Più recentemente Fenton (1979) ha presentato una teoria dell'onda cnoidale che consente di disporre di soluzioni di ordine di approssimazione più elevati.

In linea generale, le caratteristiche dell'onda possono essere descritte in forma parametrica in funzione del modulo  $k$  degli integrali ellittici. Mentre  $k$  di per se non ha alcun significato fisico, esso è spesso utilizzato per descrivere le relazioni tra i vari parametri caratterizzanti l'onda.

La posizione  $y_s$  della superficie libera, misurata dal fondo, è fornita da:

$$y_s = y_t + H \cdot cn^2 \left[ 2K(k) \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right), k \right] \quad [1.51]$$

dove  $y_t$  rappresenta la distanza del cavo dell'onda dal fondo;  $H$  rappresenta l'altezza dell'onda;  $cn$  rappresenta la funzione ellittica coseno;  $K(k)$  rappresenta l'integrale ellittico completo;  $k$  rappresenta i moduli degli integrali ellittici.

La funzione coseno ellittico è una funzione periodica dove  $cn^2 \left[ 2K(k) \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) \right]$  ha ampiezza massima pari ad uno. Il modulo  $k$  è definito tra 0 ed 1, in particolare quando  $k=0$  il profilo dell'onda si riduce ad una sinusoide così come fornita dalla teoria lineare, viceversa per  $k=1$  il profilo diventa quello di un'onda solitaria.

La distanza dal fondo del cavo dell'onda  $y_t$  è fornito da:

$$\frac{y_t}{h} = \frac{y_c}{h} - \frac{H}{h} = \frac{16h^2}{3L^2} K(k)[K(k) - E(k)] + 1 - \frac{H}{h} \quad [1.52]$$

dove  $y_c$  rappresenta la distanza della cresta dell'onda dal fondo e  $E(k)$  rappresenta l'integrale ellittico del secondo ordine.

Infine la lunghezza d'onda è fornita da:

$$L = \sqrt{\frac{16h^3}{3H}} k \cdot K(k) \quad [1.53]$$

## **Capitolo 2. Un esempio di sistema non lineare in idraulica marittima: il generatore d'onda**

### **2.1 Premessa**

Le soluzioni del problema differenziale della propagazione del moto ondoso affrontate nel capitolo precedente, fanno riferimento ad una situazione ideale, dove l'onda, con cresta infinita, si propaga su un fondale piatto. Come già accennato, tale soluzione del moto rappresenta il punto di partenza per affrontare situazioni particolari di maggiore complessità.

Nella realtà non sono rari i casi in cui il contorno del fluido risulti confinato ed il campo di moto presenti delle discontinuità batimetriche e/o ostacoli di vario tipo. Lo studio di casi di questo genere è di fondamentale importanza per giungere alla comprensione di fenomeni molto comuni nell'idraulica marittima. Il presente lavoro di tesi punta alla comprensione ed alla ricostruzione del campo di moto di un'onda che si propaga al di sopra di forti discontinuità batimetriche, quali le barriere sommerse, e della risposta non lineare del moto alla presenza di tali strutture.

In questo capitolo si affronterà dettagliatamente, dal punto di vista teorico, lo studio degli effetti non lineari che hanno luogo in un canale bidimensionale quando una successione di onde periodiche vuole essere generata da un ondogeno piano, ed in particolare di tipo a pistone (*"piston type wave-maker"*). Tale applicazione al problema della propagazione dell'onda, sebbene appaia distante dall'oggetto principale di questo lavoro, è invece un punto di riferimento teorico profondamente affine al caso delle barriere sommerse. L'analisi dettagliata delle soluzioni teoriche presenti in letteratura, ha permesso di comprendere il fenomeno della scomposizione dell'onda in armoniche di alta frequenza e di utilizzarne i risultati per fornire un approccio alternativo alla ricostruzione del campo di moto a tergo di barriere sommerse.

Il primo lavoro discusso è quello di Flick e Guza (1980), che propone la trattazione più completa del fenomeno in esame. Immediatamente a seguire verrà sinteticamente riproposto il lavoro di Goda, pubblicato nel 1997, che ha il pregio di estendere l'analisi teorica sino al terzo ordine di approssimazione e di proporre soluzioni analitiche relativamente semplici. Infine la discussione del lavoro di Madsen (1971) consentirà di acquisire relazioni di previsione degli effetti non lineari particolarmente semplici e di immediata applicazione.

### **2.2 Flick e Guza (1980): "Paddle Generated Waves in Laboratory Channels"**

Come già ricordato nel paragrafo precedente, il lavoro di Flick e Guza (1980) rappresenta probabilmente la trattazione più completa del fenomeno di generazione ondosa periodica mediante battitori piani. Esso commenta inoltre in maniera efficace i corrispondenti effetti distorsivi non lineari, che costituiscono l'oggetto centrale di questo lavoro.

Il problema è affrontato mediante l'approccio perturbativo di Stokes, arrestandosi al secondo ordine della serie corrispondente. Come vedremo sarà necessario ripercorrere le analisi già svolte nel corso del Capitolo 1, salvo completare il sistema di equazioni che definisce il problema, mediante un'opportuna condizione al contorno, di carattere cinematico, che esprime l'assenza di flusso di materia attraverso la superficie del battitore.

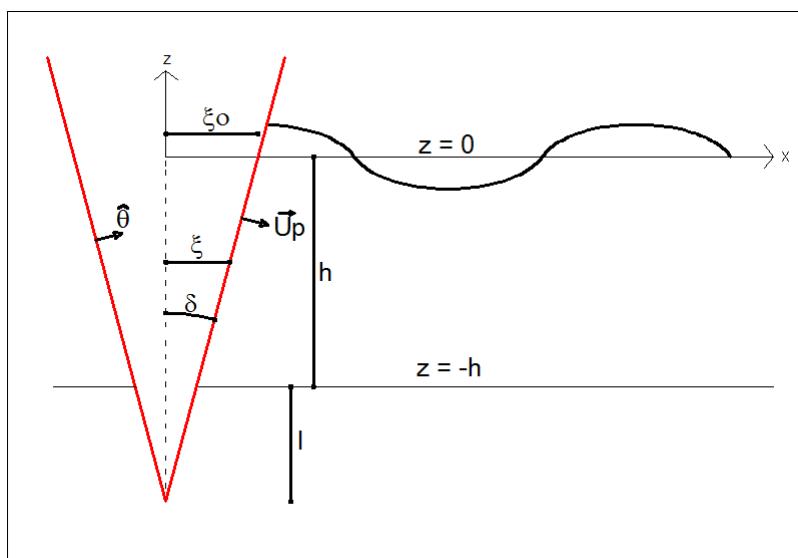


Figura 2.1. Schematizzazione di un battitore tipo flap

Le soluzioni discusse in seguito mostreranno come al primo ordine di approssimazione l'ampiezza dell'onda da generare sia proporzionale alla corsa dell'ondogeno (*stroke*). Diversamente, vedremo come al secondo ordine, il movimento periodico della pala determina la generazione di onde secondarie parassite che attraverseranno il canale muovendosi con la propria celerità (*free waves*, onde libere). Esse di fatto possono arrecare un disturbo significativo alla modellazione fisica.

Facciamo dunque riferimento alla Figura 2.1. Quest'ultima si riferisce ad un generico battitore del tipo flap, nell'intesa che un ondogeno a pistone rappresenti una estensione concettuale di quest'ultimo.

L'approccio perturbativo di Stokes al secondo ordine di approssimazione conduce dunque alle seguenti relazioni, valide per il potenziale cinetico  $\Phi$  e per il profilo del pelo libero  $\eta$ :

$$\begin{cases} \Phi(x, z, t) = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} \\ \eta(x, z, t) = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} \end{cases} \quad [2.1]$$

In cui, le potenze del parametro perturbativo  $\varepsilon$  sono considerate moltiplicate per le rispettive variabili. Di conseguenza ciascun termine dell'equazione [2.1] rappresenta un infinitesimo di ordine superiore rispetto al precedente ed il pedice, quindi, rappresenta l'ordine di approssimazione.

Il punto di partenza per la soluzione del problema del moto sono i sistemi di equazioni al primo ed al secondo ordine di approssimazione così come riportati nei paragrafi

1.3.1 ed 1.3.2. Ciò che, invece, è necessario introdurre è l'equazione che descrive il moto del generatore d'onda. Osservando lo schema di Figura 2.1 è immediato verificare che tale equazione si esprime nella forma:

$$x = \xi \quad [2.2]$$

Introducendo le variabili adimensionali:

$$\begin{cases} x' = k_1 x \\ \xi' = \frac{\xi}{\xi_0} \end{cases} \quad [2.3]$$

in cui  $k_1$  è il numero d'onda relativo al periodo  $T$  fondamentale delle ondazioni e  $\xi_0$  è il massimo spostamento (corsa o *semi-stroke*) in corrispondenza del pelo libero dell'acqua. Si ottiene quindi l'equazione del battitore nella forma:

$$x' = (k_1 \xi_0) \xi' \quad [2.4]$$

Guardando la Figura 2.1, si trae immediatamente che lo spostamento  $\xi$  alla generica profondità  $z$  del battitore è pari a:

$$\xi = \frac{\xi_s}{(l+h)} (l+h+z) \quad [2.5]$$

essendo  $\xi_s$  lo spostamento in superficie, vale a dire per  $z=0$ , al generico istante  $t$ . Ovviamente esso è pari a  $\xi_0 \text{ sen } \omega t$ , e dunque potremo scrivere:

$$\xi = \xi_0 \text{ sen } \omega t \frac{(l+h+z)}{(l+h)} \quad [2.6]$$

Chiaramente quando  $l \rightarrow \infty$ , cioè per battitori del tipo a pistone, si avrà  $\xi = \xi_0 \text{ sen } \omega t$ .

A questo punto è necessario introdurre una nuova condizione sul battitore che rappresenti una frontiera del campo di moto. Tale condizione porge che la componente di velocità delle particelle fluide in direzione ortogonale alla superficie dell'ondogeno deve essere uguale alla componente di velocità del battitore nella stessa direzione. Dal punto di vista matematico il precedente concetto può essere espresso come segue:

$$[\nabla \Phi \cdot \hat{\theta} = \overline{u_p} \cdot \hat{\theta}] \quad \text{per} \quad x' = (k_1 \xi_0) \xi' \quad [2.7]$$

in cui  $\hat{\theta}$  indica il versore normale alla superficie del battitore ed  $\overline{u_p}$  indica la velocità dell'ondogeno. Per esplicitare l'equazione [2.7], si introduce l'ulteriore ipotesi ossia che la massima corsa del battitore in superficie sia piccola rispetto all'altezza dell'ondogeno:



$$\frac{\xi_0}{(l+h)} = \delta_0 \ll 1 \quad [2.8]$$

Si ha dunque che, al generico istante  $t$ , l'angolo al centro  $\delta$  vale  $\delta_0 \text{ sen } \omega t$ . Assunte le rotazioni positive antiorarie, si ha dalla Figura 2.1:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_x = \cos \delta = \cos(\delta_0 \text{ sen } \omega t) \cong 1 + o(\delta^2) \\ \hat{\theta}_z = \sin \delta = \sin(\delta_0 \text{ sen } \omega t) \cong \delta_0 \text{ sen } \omega t + o(\delta^3) \end{cases} \quad [2.9]$$

e quindi:

$$\nabla \phi \cdot \hat{\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{\theta}_x + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\theta}_z = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \delta_0 \text{ sen } \omega t + o\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta^2\right) \quad [2.10]$$

Per quanto riguarda il secondo membro dell'equazione [2.7] osserviamo che il moto di un qualsiasi punto del generatore avviene ortogonalmente alla congiungente con il centro di rotazione, e perciò proprio nella direzione  $\hat{\theta}$ .

Lo spostamento elementare  $|ds| = r d\delta = d(r\delta)$ , in quanto il raggio di rotazione è una costante. Osserviamo ancora che:

$$r = \frac{(l+h+z)}{\cos \delta} \cong (l+h+z) \quad [2.11]$$

Si avrà pertanto:

$$\vec{u}_p = |u_p| \hat{\theta} = \left| \frac{ds}{dt} \right| \hat{\theta} = \frac{d[(l+h+z)\delta_0 \text{ sen } \omega t]}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \hat{\theta} \quad [2.12]$$

Pertanto si ha:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \delta_0 \text{ sen } \omega t + o\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta^2\right) \quad [2.13]$$

Naturalmente la precedente condizione al contorno vale per  $x' = (k_1 \xi_0) \xi'$ . D'altro canto dividendo e moltiplicando per  $(l+h)$  si ottiene:

$$x' = \delta_0 k_1 \xi' (l+h) \quad [2.14]$$

Introduciamo subito l'ipotesi che  $\delta_0$  abbia lo stesso ordine di grandezza di  $\Phi^{(1)}$  e  $\eta^{(1)}$ . Conseguentemente il termine tra le parentesi al secondo membro della [2.13] è almeno di terzo ordine e si può trascurare nelle ipotesi date di analizzare il fenomeno sino al secondo ordine di approssimazione. Quindi si ha:

$$\left[ \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \delta_0 \sin \omega t \right]_{x'=(k_1 \xi_0) \xi'} \quad [2.15]$$

Espandendo la [2.15] in serie di Taylor di punto iniziale  $x' = 0$ , effettuando una serie di passaggi analitici, che qui si tralasciano per brevità, tenendo conto delle [2.1] e mantenendo i termini fino al secondo ordine di approssimazione, si giunge alle seguenti condizioni al contorno al battitore, rispettivamente al primo ed al secondo ordine di approssimazione:

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{d\xi}{dt} \quad [2.16]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x^2} \xi - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \delta_0 \sin \omega t \right]_{x=0} \quad [2.17]$$

### 2.2.1 La soluzione al primo ordine

La soluzione del problema che stiamo affrontando, al primo ordine di Stokes, si ottiene combinando il sistema di equazioni al primo ordine di cui al paragrafo 1.3.1 con la condizione supplementare al contorno [2.16]. Quest'ultima porge che per piccoli spostamenti la componente orizzontale di velocità del fluido in corrispondenza dell'ondogeno deve uguagliare la velocità orizzontale del battitore. Il rispetto di questa condizione determina l'occorrenza di termini, denominati *modi evanescenti*, che si riducono progressivamente man mano che ci si allontana dal battitore. In definitiva la soluzione lineare del problema, proposta per la prima volta da F. Biésel nel 1951, è:

$$\Phi^{(1)} = A \cosh[k_1(z+h)] \sin(k_1 x - \omega t) - \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos[k_m(z+h)] \exp(-k_1 x) \quad [2.18]$$

In cui:

$$A = \frac{\xi_0 \sigma}{k} \frac{\int_{-h}^0 (h+l+z) \cosh k_1(z+h) dz}{\int_{-h}^0 (h+l) \cosh^2 k_1(z+h) dz} \quad [2.19]$$

$$A_m = \frac{\xi_0 \sigma}{k_m} \frac{\int_{-h}^0 (h+l+z) \cosh k_m(z+h) dz}{\int_{-h}^0 (h+l) \cosh^2 k_m(z+h) dz} \quad [2.20]$$

I numeri d'onda  $k_1$  e  $k_m$  si ottengono dalle seguenti equazioni:

$$\omega^2 = g k_1 \cdot \tanh(k_1 h) \quad [2.21]$$

$$\omega^2 = -g k_m \cdot \tanh(k_m h) \quad [2.22]$$

L'equazione [2.21] è la semplice relazione di dispersione lineare, mentre le soluzioni della [2.22] sono mostrate nella Figura 2.2, ripresa da Dean e Darlymple (1991).

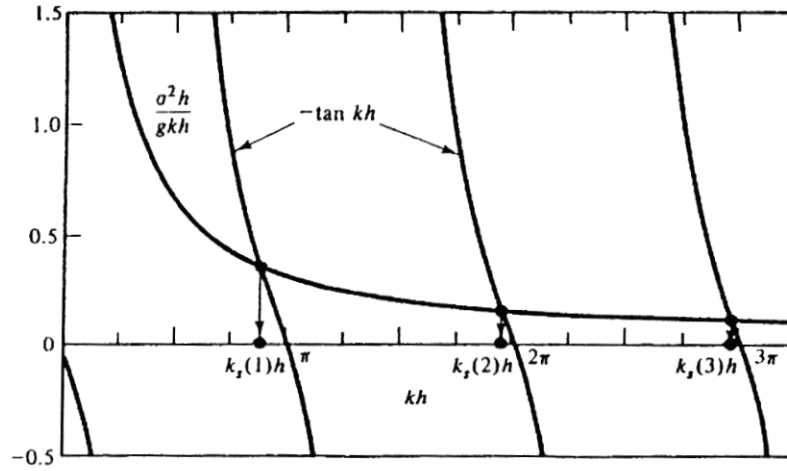


Figura 2.2. Rappresentazione grafica delle soluzioni dell'equazione [2.22]

Il primo addendo dell'equazione [2.18] rappresenta l'onda progressiva del primo ordine che si propaga nella direzione delle  $x$  positive. Dunque, se l'ampiezza di tale onda è  $a$ , dalla teoria lineare esposta nel Capitolo 1, deve essere:

$$A = \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{1}{\cosh(k_1 h)} \quad [2.23]$$

Uguagliando la [2.23] e la [2.19], e svolgendo gli integrali, si ottiene la relazione generale che lega, al primo ordine, l'ampiezza dell'onda da generare e la corsa o *semi-stroke* del battitore:

$$\frac{a}{\xi_0} = \frac{2 \sinh(k_1 h)}{k_1(h+l)} \frac{k_1(h+l) \sinh(k_1 h) - \cosh(k_1 h) + 1}{\sinh(k_1 h) \cosh(k_1 h) + k_1 h} \quad [2.24]$$

Dalla quale si possono facilmente estrapolare le soluzioni per l'ondogeno a pistone, cioè per  $l \rightarrow \infty$ , e per un *flap* incernierato sul fondo ( $l = 0$ ). Si ha:

$$\frac{a}{\xi_0} = \frac{2 \sinh^2(k_1 h)}{\sinh(k_1 h) \cosh(k_1 h) + k_1 h} \quad [2.25]$$

nel caso del *pistone* e:

$$\frac{a}{\xi_0} = \frac{4 \sinh(k_1 h)}{\sinh(2k_1 h) + 2k_1 h} \left[ \sinh(k_1 h) + \frac{1 - \cosh(k_1 h)}{k_1 h} \right] \quad [2.26]$$

nel caso del *flap*.

Le considerazioni che si svolgeranno da qui in avanti riguarderanno esclusivamente l'ondogeno di tipo a *pistone* essendo questo il caso di maggiore interesse e di maggiore

approfondimento nel presente studio. A tale scopo si propone la Figura 2.3 che schematizza il problema che si sta studiando per tale tipologia di generatore d'onda.

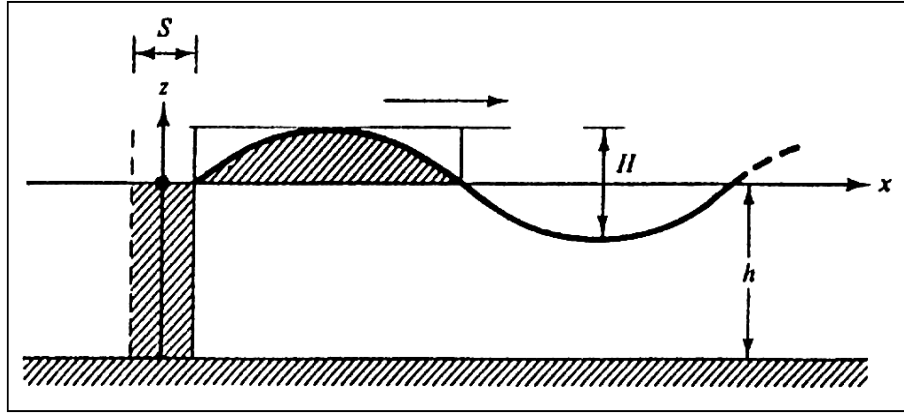


Figura 2.3. Schematizzazione di un battitore tipo a pistone

Appare interessante indagare le caratteristiche della soluzione [2.25] in condizioni di acque basse  $kh < \frac{\pi}{10}$ .

$$\frac{a}{\xi_0} = k_1 h \quad [2.27]$$

Ovvero, indicando con  $S = 2 \xi_0$  l'intero percorso (*stroke*) dell'ondogeno:

$$\frac{H}{S} = k_1 h \quad [2.28]$$

L'equazione [2.28] ha un significato fisico abbastanza chiaro: essa porge che la massa d'acqua spostata dal battitore durante un periodo si ritrova interamente in una semilunghezza d'onda (Figura 2.3). Infatti si ha che la massa d'acqua contenuta nella porzione campita del profilo vale:

$$\int_0^{L/2} \frac{H}{2} \sin(k_1 h) dx = \frac{H}{k_1} \quad [2.29]$$

D'altra parte la massa d'acqua spostata dal battitore in un periodo vale  $S \cdot h$ . Dall'uguaglianza di queste due quantità deriva direttamente la [2.28].

La Figura 2.4 riporta le soluzioni generali [2.25] e [2.26] per il caso appena discusso di ondogeno piano.

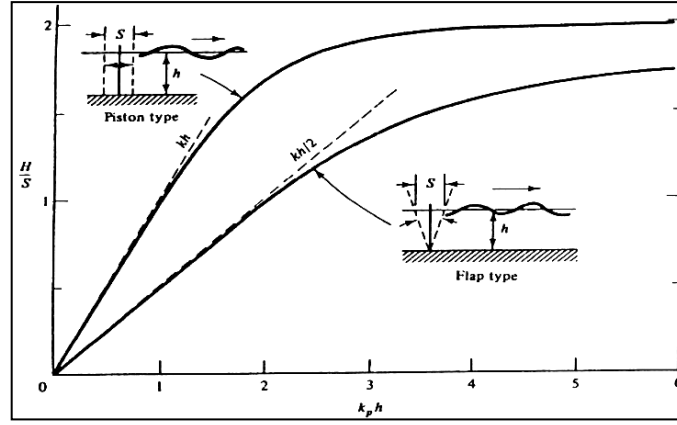


Figura 2.4. Rapporto tra l'altezza d'onda e lo stroke al variare di  $k_1 h$

Come abbiamo ricordato in precedenza, la soluzione generale del problema della generazione ondosa in un canale si compone dell'onda lineare principale che si propaga nel verso delle  $x$  positive e di una serie di *modi evanescenti* la cui ampiezza si riduce esponenzialmente man mano che ci si sposta dal battitore. Tali termini aggiuntivi sono necessari al rispetto della condizione al contorno aggiuntiva espressa dall'equazione [2.16].

Cerchiamo adesso di comprendere quale sia la distanza di smorzamento oltre la quale la presenza dei modi evanescenti può essere trascurata. Ovviamente il termine della serie al secondo membro dell'equazione [2.18] che decade più lentamente è il primo. Per questo, il fattore di smorzamento vale:

$$\exp\left(-k_1 h \frac{x}{h}\right) \quad [2.30]$$

Guardando con attenzione la Figura 2.2 la prima soluzione dell'equazione [2.22] è compresa tra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$ , per cui il fattore  $k_1 h$  vale al più  $\frac{\pi}{2}$ . La [2.30] diviene così:  $\exp\left(-\frac{\pi x}{2h}\right)$ . Poiché l'esponenziale di  $(-\pi)$  è praticamente nullo, gli effetti dei modi evanescenti possono ritenersi trascurabili già ad una distanza dal generatore pari a 2 volte la profondità del fondale  $h$ .

Ancora più interessante in tal senso è il caso di un battitore a pistone che lavora in acque basse. In tali condizioni idrodinamiche la velocità orizzontale delle particelle è uniforme con  $z$  e vale:

$$u = \frac{agk_1}{\omega} \cos(\omega t); \text{ per } x = 0 \quad [2.31]$$

D'altro canto  $a = k_1 h \xi_0$ , a norma dell'equazione [2.27]. Si ha quindi:

$$u = \frac{\xi_0 g h k_1^2}{\omega} \cos(\omega t); \text{ per } x = 0 \quad [2.32]$$

Poiché in acque basse la celerità di propagazione dell'onda è  $\frac{\omega}{k_1} = \sqrt{gh}$ , si ha dalla [2.32]:

$$u = \xi_0 \omega \cos(\omega t) \quad \text{per} \quad x = 0 \quad [2.33]$$

La [2.33] rappresenta proprio la velocità del battitore in quanto:

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t) \rightarrow \frac{d\xi}{dt} = \xi_0 \omega \cos(\omega t) \quad [2.34]$$

In definitiva per un battitore a pistone che opera in acque basse, la condizione al contorno aggiuntiva è automaticamente soddisfatta senza bisogno di ricorrere ai modi evanescenti. Questi ultimi, pertanto, potranno essere trascurati nelle condizioni appena descritte.

### 2.2.2 La soluzione al secondo ordine

Riprendiamo per un momento la condizione al contorno [2.17] al secondo ordine di approssimazione e riscriviamola tenendo conto della [2.8]. Si ottiene:

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x^2} \xi - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\xi_0}{(1+h)} \sin \omega t \right]_{x=0} \quad [2.35]$$

Come si vede, il secondo addendo del secondo membro è un termine di “tilt” (ovvero di tipo angolare) che è presente solo nel caso di ondogeno di tipo *flap*, e tende a zero nel caso di battitore a *pistone*, in quanto  $l \rightarrow \infty$ .

È ora conveniente scomporre il potenziale cinetico al secondo ordine in due termini:

$$\Phi^{(2)} = \Phi_B^{(2)} + \Phi_F^{(2)} \quad [2.36]$$

Il primo addendo,  $\Phi_B^{(2)}$ , soddisfa il sistema di equazioni differenziali al secondo ordine di approssimazione, senza tener conto della condizione aggiuntiva [2.35]. Si ottiene quindi:

$$\nabla \nabla \Phi_B^{(2)} = 0 \quad [2.37]$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi_B^{(2)}}{\partial z \partial t} + g \frac{\partial \Phi_B^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=0} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right] \right\}_{z=0} \quad [2.38]$$

$$\left[ \eta^{(2)} = -\frac{1}{g} \left\{ -\frac{\partial \Phi_B^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} + \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \right]_{z=0} \quad [2.39]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_B^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0 \quad [2.40]$$

La soluzione di questo sistema di equazioni differenziali, non omogeneo, rappresenta semplicemente la correzione di Stokes al secondo ordine di approssimazione.

È importante notare che questo sistema è “forzato” dalla soluzione al primo ordine. In pratica siamo nella condizione per la quale il sistema oscilla per effetto di una forza applicata oscillante; tale forzante esterna è rappresentata proprio dalla soluzione al primo ordine. Per chiarire ulteriormente questo concetto, prendiamo in considerazione l’equazione generalizzata di Bernoulli sulla superficie libera:

$$\eta^{(2)} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{z=0} + \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t}\right)_{z=0} = 0 \quad [2.41]$$

nella quale sono stati trascurati i termini cinetici di quarto ordine. Confrontando la [2.41] con la [2.39] possiamo concludere che esiste una pressione fittizia applicata sulla superficie libera pari a:

$$\frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{g} \eta^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \right) \quad [2.42]$$

che dipende direttamente dalla soluzione al primo ordine.

È quindi chiaro che questo tipo di oscillazione è legato alle oscillazioni del primo ordine e non esisterebbe senza queste ultime. Per questo motivo esse vengono indicate nella letteratura anglosassone con il termine “*bound*”. Per le ragioni appena descritte è evidente che le *bound waves* viaggeranno nello spazio con la medesima celerità delle onde al primo ordine e per questo motivo non determinano una variazione nello spazio della forma dell’onda: in pratica le onde di Stokes del secondo ordine si propagano indefornate nello spazio.

Per quanto riguarda  $\Phi_F^{(2)}$ , esso deve soddisfare le seguenti equazioni omogenee:

$$\nabla \nabla \Phi_F^{(2)} = 0 \quad [2.43]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_F^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_F^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad [2.44]$$

$$g \eta^{(2)} + \left[ \frac{\partial \Phi_F^{(2)}}{\partial t} \right]_{z=0} = 0 \quad [2.45]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi_F^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0 \quad [2.46]$$

ed in più la condizione aggiuntiva al battitore espressa come segue:

$$\left[ \frac{\partial \Phi_F^{(2)}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x^2} \xi - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\xi_0}{(1+h)} \operatorname{sen} \sigma t - \frac{\partial \Phi_B^{(2)}}{\partial x} \right]_{x=0} \quad [2.47]$$

Le equazioni [2.43] - [2.46] sono formalmente identiche a quelle incontrate per la soluzione al primo ordine di approssimazione di Stokes. Come in quel caso, l'omogeneità delle equazioni implica che la soluzione rappresenta un'oscillazione "libera", che si propaga nello spazio con celerità consistente alla relazione di dispersione:

$$4\omega^2 = g k_2 \tanh(k_2 h) \quad [2.48]$$

In cui  $k_2$  è il numero d'onda delle oscillazioni secondarie libere la cui celerità sarà pari a:

$$c_2 = \frac{2\omega}{k_2} \quad [2.49]$$

È facile riconoscere che la profondità relativa di queste *free waves*,  $k_2 h$ , è funzione della profondità relativa delle onde principali,  $k_1 h$ . Dalla [2.47] si ha infatti che:

$$4\omega^2 h = g k_2 h \tanh(k_2 h) \quad [2.50]$$

ma:

$$\omega^2 h = g k_1 h \tanh(k_1 h) \quad [2.51]$$

E quindi:

$$4 k_1 h \tanh(k_1 h) = k_2 h \tanh(k_2 h) \quad [2.52]$$

Dall'equazione [2.51], assegnato  $k_1 h$ , si ottiene  $k_2 h$  dalla equazione:

$$x \tanh(x) - c_1 = 0 \quad [2.53]$$

che nell'intervallo  $[0, \pi]$  ha un'unica soluzione positiva per ogni  $c > 0$  essendo  $x \tanh(x)$  una funzione strettamente crescente.

Dall'equazione [2.53] si deduce che in acque alte ( $k_1 h > \pi$ ),  $k_2 = 4 k_1$ , mentre in acque molto basse ( $k_2 h < \frac{\pi}{10}$ )  $\Rightarrow$  ( $k_1 h < \frac{\pi}{10}$ ),  $k_2 = 2 k_1$ . In generale, quindi:

$$c_2 = \frac{2\omega}{k_2} \leq c_1 \quad [2.54]$$

valendo il simbolo di uguaglianza solo in acque molto basse. In generale quindi, ci attendiamo un differenziale tra la celerità di propagazione delle *free waves* e quella



delle onde principali, e questo determina una variazione del profilo del moto ondoso nello spazio; questo fenomeno viene espresso generalmente mediante la locuzione *moto ondoso non permanente*. Alla generale non permanenza, si accompagna poi la comparsa di creste secondarie in posizioni differenti a seconda della sezione esaminata del canale.

In definitiva  $\Phi_B^{(2)}$  e  $\eta_B^{(2)}$  possono dedursi direttamente dalle equazioni di Stokes al II ordine riportate nel Capitolo 1. Di conseguenza l'ampiezza dell'armonica legata (*bound*) al secondo ordine è pari a:

$$a_B^{(2)} = (k_1 a) a \frac{\cosh(k_1 h) [2 + \cosh 2k_1 h]}{4 \sinh^3(k_1 h)} \quad [2.55]$$

mentre il potenziale delle onde secondarie libere è pari a:

$$\begin{aligned} \Phi_F^{(2)} = & [B_0 \sin(k_2 x - 2\omega t) + D_0 \cos(k_2 x - 2\omega t)] \cosh[k_2 (z + h)] + \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \sin(2\omega t) + D_n \cos(2\omega t)] \exp(-k_n x) \cos[k_n (z + h)] \end{aligned} \quad [2.56]$$

Essendo:

$$B_0 = \frac{1}{I} \int_{-h}^0 Q_1 \cosh[k_2 (z + h)] dz \quad [2.57]$$

$$D_0 = \frac{1}{I} \int_{-h}^0 Q_2 \cosh[k_2 (z + h)] dz \quad [2.58]$$

con:

$$I = k_2 \int_{-h}^0 \cosh^2[k_2 (z + h)] dz \quad [2.59]$$

$$a_{(2)}^F = \frac{2\sigma}{g} \cosh(k_2 h) \cdot (B_0^2 + D_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad [2.60]$$

Le funzioni  $Q_1$  e  $Q_2$  sono piuttosto complicate e derivano dalla sostituzione della soluzione [2.55] nella condizione al contorno [2.47]. Le espressioni di  $B_n$  e  $D_n$  non sono di interesse immediato in quanto i modi evanescenti al secondo ordine si riducono molto rapidamente man mano che ci si allontana dal battitore. Le loro espressioni non vengono riportate dagli autori.

In effetti il principale limite del lavoro di Flick e Guza, per altro estremamente generale e completo, è rappresentato dal fatto che non viene fornita nessuna soluzione esplicita ma solo in via simbolica, come mostrato dalle equazioni precedenti.

Nella Figura 2.5 gli Autori mostrano il confronto tra i valori teorici del rapporto  $a_F^{(2)}/a_B^{(2)}$ , ricavati numericamente dagli integrali precedenti, ed alcuni dati sperimentali sui cui dettagli torneremo più avanti nel corso del presente lavoro.

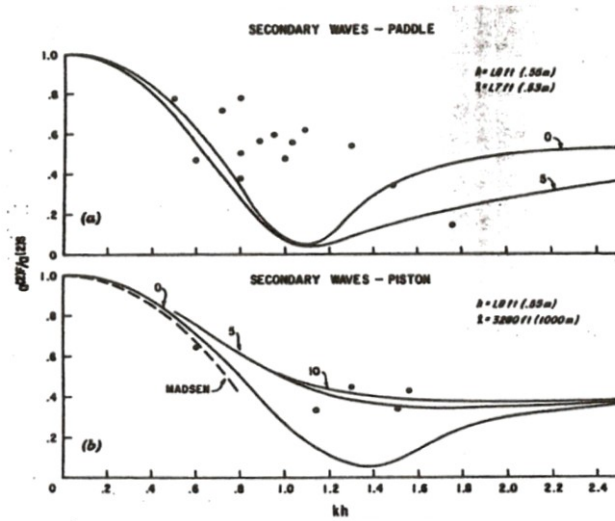


Figura 2.5. Rapporto tra l'ampiezza dell'onda free e legata in funzione di  $kh$ ; Flick and Guza (1980).

Il grafico 2.5a si riferisce ad un flap ancorato al fondo mentre il 2.5b fa capo ad un ondogeno a pistone. In entrambi i casi il fondale è fissato a  $0.55\text{m}$ . Ciascuna curva, diagrammata in funzione della profondità relativa principale  $kh$ , è parametrata mediante un piccolo indice che è pari al numero dei modi evanescenti al primo ordine portati in conto nella soluzione. Così ad esempio per un generatore a pistone, la presenza dei modi evanescenti diviene rilevante, come atteso, per  $kh$  superiori a  $0.4$ ; al contrario in acque basse le curve sembrano convergere e tendere all'unità (ampiezza della *free waves* pari a quella dell'onda legata) quando  $kh \rightarrow 0$ . Per altro dalla figura 2.5b sembrerebbe che il numero dei modi evanescenti non sia rilevante (le curve con 5 e 10 modi sono abbastanza vicine l'una all'altra), mentre appare chiaro che la soluzione di acque basse (0 modi evanescenti) sottostima l'ampiezza dell'onda libera secondaria specialmente quando  $kh$  è dell'ordine di 1.

Per un generatore *flap*, la differenza tra le soluzioni con 0 e 5 modi evanescenti differiscono significativamente solo per  $kh > 1$  e presentano per  $kh \cong 1$ , un minimo molto pronunciato prossimo a zero e circa pari a quello della soluzione di acque basse per l'ondogeno a pistone.

Ma quello che appare macroscopicamente evidente dalla figura è che i dati sperimentali sono in buon accordo con la teoria solo per l'ondogeno a pistone, mentre per il flap l'accordo è ragionevole solo per i valori di  $kh$  piccoli. D'altro canto per valori unitari dell'ascissa la teoria mostra un chiaro deficit cui gli Autori non hanno saputo fornire spiegazione.

La differenza tra i due comportamenti è senz'altro interessante, sebbene il numero dei dati sperimentali adoperati da Flick e Guza sia alquanto limitato, e potrebbe costituire un interessante spunto di ricerca per un lavoro futuro. Per quel che concerne più specificamente il presente lavoro si tesi, che si concentra sul battitore a pistone, il confronto con la teoria appare senz'altro incoraggiante.

Un ultimo aspetto interessante del lavoro di Flick e Guza riguarda il caso di onde generate in acque relativamente basse, tali cioè da generare un'onda secondaria libera di significativa ampiezza, e fatte successivamente evolvere su di un fondale piano di dolce acclività. Il risultato di tale esperimento è stato quello di una riduzione sensibile del rapporto  $a_F^{(2)}/a_B^{(2)}$  man mano che il fondale si riduceva. Ciò è immediatamente deducibile dalla Figura 2.6 che si riferisce ad onde monocromatiche con periodo 1.06 secondi. Il fondale è costante in prossimità del battitore e pari a 0.55m; successivamente, in corrispondenza della freccia riportata sul grafico, il fondale inizia progressivamente a ridursi con una pendenza media che sfortunatamente non è rilevabile dal lavoro.

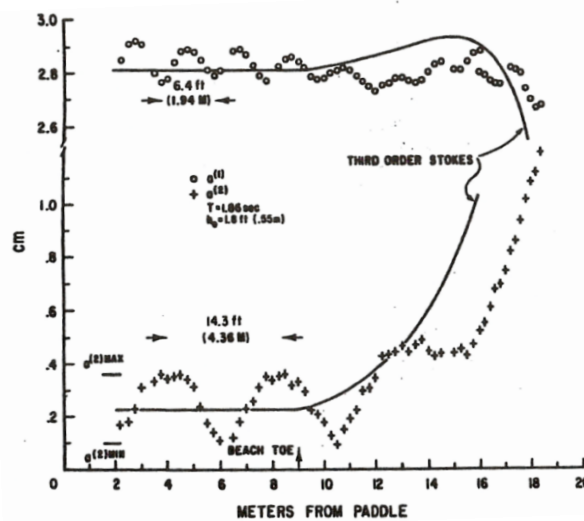


Figura 2.6. Evoluzione di onde secondarie libere in un canale; Flick and Guza (1980).

I circoletti bianchi rappresentano l'ampiezza fondamentale dello spettro di potenza, mentre le crocette si riferiscono all'ampiezza di frequenza doppia rispetto alla fondamentale.

Nella zona piatta che precede la spiaggia l'ampiezza del secondo ordine oscilla vistosamente a causa, come vedremo meglio in seguito, della interazione tra componenti libere e legate. La fluttuazione si riduce sensibilmente man mano che il moto ondoso evolve sulla spiaggia indicando una riduzione degli effetti parassiti sulla frequenza  $2\omega$ . Anche l'ampiezza fondamentale subisce un'evidente oscillazione dovuta alla riflessione del moto ondoso dalla spiaggia.

Questo risultato, per alcuni versi sorprendente, può essere spiegato alla luce della teoria lineare della rifrazione (*shoaling*). La variazione dell'altezza d'onda conseguente alla riduzione del tirante idrico è mostrata in Figura 2.7, dove l'asse delle ascisse rappresenta il rapporto tra il tirante idrico  $h$  e lunghezza d'onda di largo  $L_0$ . Sulle ordinate è riportato il rapporto tra l'altezza d'onda locale  $H$  corrispondente alla generica profondità e l'analoga quantità di acque profonde  $H_0$ .

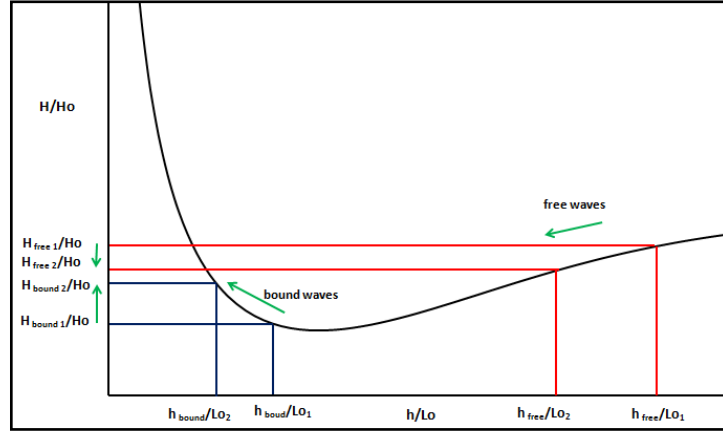


Figura 2.7. Diagramma di shoaling lineare

Poiché le onde libere hanno frequenza doppia rispetto alla fondamentale, hanno anche lunghezza minore. Quando il fondale si riduce esse vengono a trovarsi nella porzione del diagramma precedente nella quale le altezze d'onda decrescono con il fondale; dunque la loro ampiezza si riduce. Al contrario le onde legate seguono la sorte della componente fondamentale; poiché quest'ultima viene a trovarsi in acque estremamente basse, essendo la sua lunghezza maggiore, l'ampiezza del primo ordine crescerà trascinando con sé anche la componente *bound*. Il rapporto quindi, si riduce sia perché diminuisce il numeratore sia perché aumenta il denominatore.

### 2.3 Goda (1997): "Recurring Evolution of Water Waves Through Nonresonant Interactions"

Le caratteristiche principali del lavoro di Goda sono quelli di aver fornito delle relazioni esplicite per il calcolo delle onde spurie generate da un ondogeno a pistone e di aver esteso l'indagine fino al terzo ordine di approssimazione, consentendo di analizzare gli effetti di ulteriori fenomeni che possono aver luogo nel corso degli esperimenti.

Per quanto riguarda gli effetti del secondo ordine, l'approccio, di tipo perturbativo, è identico a quello illustrato da Flick e Guza e pertanto non viene qui ripetuto. D'altro canto è interessante riportare la soluzione esplicita per l'onda libera al secondo ordine:

$$a_F^{(2)} = k_2 a^2 b_{F2} \quad [2.61]$$

in cui  $a$  è l'ampiezza al primo ordine e:

$$b_{F2} = \frac{1}{2} \beta_{F2} \sinh(k_2 h) \quad [2.62]$$

Inoltre lo sfasamento iniziale  $\alpha_{F2}$  (costante di fase), tra onda fondamentale ed onda libera di pulsazione  $2\omega$  vale:

$$\alpha_{F2} = \arctan\left(\frac{\beta_{FC}^2}{\beta_{FS}^2}\right) \quad [2.63]$$

Per quanto riguarda gli altri coefficienti, l'Autore fornisce le seguenti espressioni:

$$\beta_{F2} = \sqrt{\beta_{FC}^2 + \beta_{FS}^2} \quad [2.64]$$

$$\begin{aligned} \beta_{FS} = & \frac{D_1[2D_1 + \sinh(2D_1)]}{4 \sinh^3 D_1 [2D_1 + \sinh(2D_2)]} \left[ \frac{\sinh(D_2 + D_1)}{(D_2 + D_1)} + \frac{\sinh(D_2 - D_1)}{(D_2 - D_1)} \right] \\ & + -12 \frac{D_0 D_1 \cosh D_2}{[2D_2 + \sinh(2D_2)][(D_2^2 - 4D_1^2) \sinh^2(D_1)]} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n D_0 (D_n \beta_1 - D_1 \beta_2) (4D_0^2 - 2D_1^2 + D_2^2 + 2D_n^2)}{[2D_2 + \sinh(2D_2)][(D_1^2 + D_2^2 + D_n^2)^2 - 4D_1^2 D_2^2]} \\ & \cdot \cosh(D_1) \cosh(D_2) \cos(D_n) \end{aligned} \quad [2.65]$$

$$\begin{aligned} \beta_{FC} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_n D_0 (D_1 \beta_1 + D_n \beta_2) (4D_0^2 - 2D_1^2 + D_2^2 + 2D_n^2)}{[2D_2 + \sinh(2D_2)][(D_1^2 + D_2^2 + D_n^2)^2 - 4D_1^2 D_2^2]} \cosh(D_1) \cosh(D_2) \cos(D_n) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A_m A_n \beta_4 D_0 (D_m + D_n) [(D_m - D_n)^2 + 4D_0^2]}{D_m D_n [2D_2 + \sinh(2D_2)][(D_m + D_n)^2 + D_2^2]} \\ & \cdot \cosh(D_2) \cos(D_m) \cos(D_n) \end{aligned} \quad [2.66]$$

$$A_n = \frac{k_1 [2k_1 h + \sinh(2k_1 h)] \sin(2\lambda_n h)}{\lambda_n [2\lambda_n h + \sinh(2\lambda_n h)] \sinh(2k_1 h)} \quad [2.67]$$

$$\begin{cases} D_0 = \frac{\omega^2 h}{g}, & D_1 = k_1 h, & D_2 = k_2 h, \\ D_3 = k_3 h, & D_m = \lambda_m h, & D_n = \lambda_n h. \end{cases} \quad [2.68]$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{-6[\coth^2(k_1 h) - \cot^2(\lambda_n h)]}{4 \cosh(k_1 h) \cos(\lambda_n h)} \\ \beta_2 = \frac{1}{\sinh(k_1 h) \sin(\lambda_n h)} \end{cases} \quad [2.69]$$

Come si può facilmente verificare, la soluzione per l'ampiezza dell'onda secondaria libera si compone di una parte principale e di una relativa ai modi evanescenti. L'Autore riferisce che la parte principale:

$$\begin{aligned} \beta_{FS} = & \frac{D_1[2D_1 + \sinh(2D_1)]}{4 \sinh^3 D_1 [2D_1 + \sinh(2D_2)]} \left[ \frac{\sinh(D_2 + D_1)}{(D_2 + D_1)} + \frac{\sinh(D_2 - D_1)}{(D_2 - D_1)} \right] \\ & - 12 \frac{D_0 D_1 \cosh D_2}{[2D_2 + \sinh(2D_2)][(D_2^2 - 4D_1^2) \sinh^2(D_1)]} \end{aligned} \quad [2.65a]$$

è coincidente con la soluzione di Flick e Guza (1980), sempre per il caso di assenza di componenti evanescenti.

In Figura 2.8 è diagrammata la soluzione completa in funzione della profondità relativa dell'onda principale e del numero di modi evanescenti.

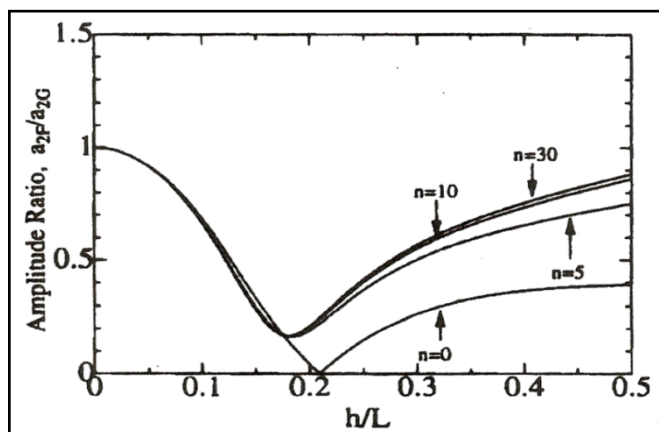


Figura 2.8. Effetto dei modi evanescenti sulle ampiezze di onde libere di secondo ordine

Come già discusso in precedenza, a proposito del battitore al primo ordine, è evidente che la soluzione "principale" (assenza di modi evanescenti) è adeguata in acque basse. A giudicare dalla figura i modi evanescenti sembrano non influenzare la soluzione fino ad  $h/L$  pari a 0.15. A partire da tale rapporto la presenza dei modi evanescenti si traduce in un incremento dell'ampiezza dell'onda spuria rispetto a quella legata; peraltro l'influenza del numero dei modi evanescenti portati in conto sembra influenzare la soluzione in maniera poco significativa al di sopra di 10. Ciò nonostante l'Autore suggerisce di adoperare nei calcoli un numero di modi evanescenti pari a 30. Sorprendentemente in acque alte il rapporto attinge il valore di 0.4 in assenza di modi evanescenti e di 0.9 quando il numero di modi evanescenti sale a 30. Sarebbe senz'altro interessante verificare la veridicità delle previsioni in acque alte per le quali va comunque tenuto in conto che la componente legata di secondo ordine è praticamente nulla. In conclusione il grafico ci riconduce alla conclusione attesa che, generando le onde in acque alte, il rischio che onde secondarie inquinino i risultati degli esperimenti è praticamente trascurabile. Comunque il tratto ascendente delle curve riportate nel grafico testimonia che al crescere della profondità relativa la *free wave* parassita si riduce meno rapidamente di quanto non faccia la corrispondente componente legata. Parimenti interessante è il grafico di Figura 2.9.

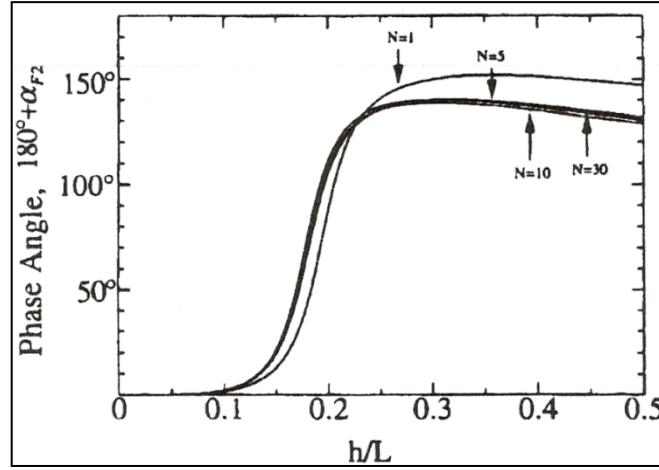


Figura 2.9. Effetto dei modi evanescenti sull'angolo di fase iniziale

Nella figura il differenziale di fase iniziale, scalato di  $-\pi$ , è diagrammato ancora una volta in funzione della profondità relativa principale e dei modi evanescenti. Per chiarire ulteriormente il significato del parametro  $\alpha_{F2}$  sarà utile definirlo nella maniera seguente. In pratica se immaginiamo che il profilo dell'onda principale al terzo ordine sia rappresentato mediante la seguente relazione:

$$\eta^{(3)} = a_1 \cos(k_1 x - \omega t) + a_2 \cos [2(k_2 x - \omega t)] + a_3 \cos [3(k_3 x - \omega t)] \quad [2.70]$$

allora il profilo dell'onda libera secondaria al secondo ordine varrà:

$$\eta_F = a_{F2} \cos(k_2 x - 2\omega t + \alpha_{F2}) \quad [2.71]$$

Dalla figura si può facilmente dedurre che in acque basse ( $h/L < 0.1$ ) lo sfasamento tra le due componenti è pari a  $(-\pi)$  indipendentemente dal numero dei modi evanescenti portati in conto. D'altro canto in acque intermedie e alte il numero dei modi evanescenti determina una riduzione dello sfasamento a parità di profondità relativa; peraltro l'influenza dei termini esponenziali appare in genere assai ridotta già quando  $N$  uguaglia e supera il valore di 5.

Per quanto riguarda la soluzione al terzo ordine, l'Autore propone il relativo problema differenziale di Stokes:

$$\nabla^2 \Phi^{(3)} = 0 \quad [2.72]$$

$$\left[ g\eta^{(3)} + \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial t} \Omega_2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} = -2\eta^{(2)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} - 2\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial z \partial t} - (\eta^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial z^2 \partial t} + \right. \\ \left. -2\eta^{(1)} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) - 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} - 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=0} \quad [2.73]$$

$$\left[ \frac{\partial \eta^{(3)}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial z} + \Omega_2 \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} = 2\eta^{(2)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} + (\eta^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial z^3} + 2\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial x} - 2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \right]_{z=0} \quad [2.74]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0 \quad [2.75]$$

cui si aggiunge, ovviamente la condizione al battitore:

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial x} = -2\xi_0 \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial x^2} \sin \sigma t - \xi_0^2 \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial x^3} \sin^2 \omega t \right]_{x=0} \quad [2.76]$$

Nelle [2.73] e [2.74], il termine  $\Omega_2$  proviene dall'espansione in serie della pulsazione angolare:

$$\begin{cases} \omega' = \omega \left[ 1 + \frac{1}{2} a^2 \Omega_2 + o(a^4) \right] \\ \Omega_2 = k_1^2 \frac{1}{8} [9 \cot^4 gh(k_1 h) - 10 \cot^2 gh(k_1 h) + 9] \end{cases} \quad [2.77]$$

La soluzione proposta da Goda è in effetti approssimata, ma consente di comprendere chiaramente la natura degli effetti del terzo ordine.

Seguendo dunque l'approccio dell'Autore, trascuriamo gli effetti dei modi evanescenti al primo ed al secondo ordine. Si ha dunque al secondo ordine:

$$\begin{cases} \Phi^{(2)} \cong \Phi_B^{(2)} + \Phi_F^{(2)} \\ \eta^{(2)} \cong \eta_B^{(2)} + \eta_F^{(2)} \end{cases} \quad [2.78]$$

dove il simbolo di "quasi uguaglianza" è stato adoperato al fine di ricordare che l'effetto dei modi evanescenti è stato trascurato.

Come al solito il sistema di equazioni differenziali che regge il problema può essere scomposto in due sottoinsiemi. Il primo non comprende l'equazione aggiuntiva al battitore ed il secondo sì. Tuttavia è necessario ulteriormente scomporre il primo dei sottoinsiemi precedenti. Infatti le condizioni al contorno [2.73] e [2.74] comprendono "termini misti" in cui la soluzione al primo ordine è moltiplicata per quella al secondo ordine. Si prenda ad esempio il termine:

$$\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial z \partial t} \quad [2.79]$$

presente nella [2.73]. Tenendo conto della [2.78] esso sarà pari a:

$$\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi_B^{(2)}}{\partial z \partial t} + \eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi_F^{(2)}}{\partial z \partial t} \quad [2.80]$$

Quindi potremmo scrivere simbolicamente:



$$\eta^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial z \partial t} = \rho + \chi \quad [2.81]$$

In sostanza alla soluzione si giunge risolvendo tre sistemi di equazioni differenziali. Il primo è non omogeneo e tiene conto di tutti i termini delle equazioni al contorno eccetto i termini di tipo  $\chi$ . Il secondo, anch'esso non omogeneo, include nelle condizioni al contorno i soli termini di tipo  $\chi$ . Ovviamente nessuno dei due precedenti sistemi tiene conto della condizione aggiuntiva al battitore.

La soluzione del primo dei due sistemi precedenti ha per soluzione il terzo termine dell'espansione di Stokes:

$$\Phi_B^{(3)}, \eta_B^{(3)} \quad [2.82]$$

Il secondo invece, produce delle “onde di interferenza”:

$$\Phi_T^{(3)}, \eta_T^{(3)} \quad [2.83]$$

Le espressioni dei termini della [2.82] sono le correzioni di Stokes al III e sono riportate nel Capitolo 1. Per quanto riguarda le onde di interferenza si ha:

$$\begin{aligned} \Phi_T^{(3)} &= \Phi_{T1}^{(3)} + \Phi_{T3}^{(3)} \\ &= \frac{1}{2} a^3 \omega k_2 \beta^{T1} \frac{\cosh(k_2 - k_1)(h + z)}{\sinh(k_2 - k_1)h} \text{sen}[(k_2 - k_1)x - \omega t + \alpha_{F2}] \\ &+ \frac{1}{2} a^3 \omega k_2 \beta^{T3} \frac{\cosh(k_2 + k_1)(h + z)}{\sinh(k_2 + k_1)h} \text{sen}[(k_2 + k_1)x - 3\omega t \\ &+ \alpha_{F2}] \quad [2.84] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_T^{(3)} &= \eta_{T1}^{(3)} + \eta_{T3}^{(3)} \\ &= \frac{1}{2} a^3 k_2^2 b^{T1} \cos[(k_2 - k_1)x - \omega t + \alpha_{F2}] \\ &+ \frac{1}{2} a^3 k_2^2 b^{T3} \cos[(k_2 + k_1)x - 3\omega t \\ &+ \alpha_{F2}] \quad [2.85] \end{aligned}$$

Con:

$$\beta_{T1} = b_{F2} \frac{8c_2^2 + 4c_2c_1 - c_1^2 - 3}{\coth[(k_2 - k_1)h] - (4c_2 - c_1)} \quad [2.86]$$

$$\beta_{T3} = b_{F2} \frac{8c_2^2 + 12c_2c_1 - c_1^2 - 21}{9 \coth[(k_2 + k_1)h] - (4c_2 + c_1)} \quad [2.87]$$

$$b_{T1} = b_{F2} \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) \frac{(2c_2 + c_1) \coth[(k_2 - k_1)h] + 2c_2c_1 - 3}{\coth[(k_2 - k_1)h] - (4c_2 - c_1)} \quad [2.88]$$

$$b_{T3} = b_{F2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \frac{3(2c_2 + c_1) \coth[(k_2 + k_1)h] + 2c_2c_1 - 7}{9 \coth[(k_2 + k_1)h] - (4c_2 + c_1)} \quad [2.89]$$

$$\begin{cases} c_1 = \coth(k_1 h) \\ c_2 = \coth(k_2 h) \end{cases} \quad [2.90]$$

e con  $b_{F2}$  definita dall'equazione [2.61].

Il grafico di Figura 2.10 mostra il rapporto tra le ampiezze delle onde di interferenza rispettivamente di frequenza  $3\omega$  ( $a_{T1}$ ) e  $\omega$  ( $a_{T3}$ ) e l'ampiezza d'onda legata di Stokes di terzo ordine. È interessante notare come in acque basse l'ampiezza delle onde di interferenza superi quella della componente di Stokes di una quantità che supera il 30% in corrispondenza della profondità relativa nulla (il rapporto tende a 1.3 quando  $h/L$  tende a zero).

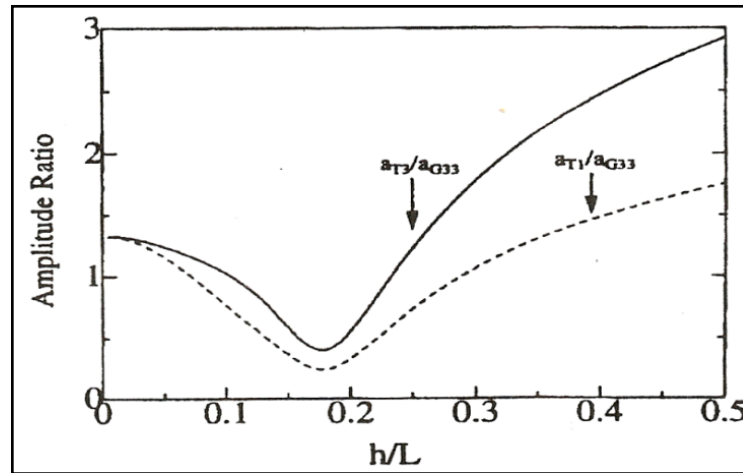


Figura 2.10. Rapporto tra l'ampiezza dell'onda interferenza e legata al terzo ordine di Stokes.

Come nel caso del secondo ordine di approssimazione, il profilo dell'onda libera di pulsazione  $3\omega$  si ottiene imponendo che il corrispondente potenziale cinetico soddisfi la condizione aggiuntiva al battitore espressa dall'equazione [2.76]. Si ha:

$$\left[ \frac{\partial \Phi_F^{(3)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_B^{(3)}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_T^{(3)}}{\partial x} - 2\xi_0 \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial x^2} \sin \omega t - \xi_0^2 \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial x^3} \sin^2 \omega t \right]_{x=0} \quad [2.91]$$

La soluzione approssimata proposta da Goda è la seguente:

$$\Phi_F^{(3)} = \frac{1}{2} a^3 \omega k_3 \beta_{F3} \cosh[k_3(h+z)] \sin(k_3 x - 3\omega t + \pi) \quad [2.92]$$

$$\eta_F^{(3)} = \frac{1}{2} a^3 k_3^2 b_{F3} \cos(k_3 x - 3\omega t + \pi) \quad [2.93]$$

con  $k_3$  e  $b_{F3}$  definite dalla relazioni:

$$9\omega^2 = gk_3 \tanh(k_3 h) \quad [2.94]$$

$$b_{F3} = \frac{1}{3} \beta_{F3} \sinh(3k_3 h) \quad [2.95]$$

$$\beta_{F3} = 6 \frac{D_1^2}{D_3} \frac{\beta_{33}}{[2D_3 + \sinh(2D_3)]} \left[ \frac{\sinh(D_3 + 3D_1)}{(D_3 + D_1)} + \frac{\sinh(D_3 - 3D_1)}{(D_3 - D_1)} \right] \quad [2.96]$$

$$\beta_{33} = \frac{1}{32 \cosh^3(k_1 h)} (c_1^2 + 3)(9c_1^5 - 22c_1^3 + 13c_1) \quad [2.97]$$

Alla soluzione precedente si aggiunge la sommatoria dei modi evanescenti che non è tuttavia riportata dall'Autore in quanto essi decadono molto rapidamente allontanandosi dal battitore.

## 2.4 Madsen (1971): "On the Generation of Long Waves". Soluzione per acque basse

Il lavoro pubblicato da Ole Secher Madsen nel 1971 non introduce alcuna informazione supplementare riguardo l'approccio teorico al problema rispetto a quanto discusso nei paragrafi immediatamente precedenti. Tuttavia egli, introducendo l'ipotesi di onde "relativamente lunghe" (relative long waves), giunge a soluzioni estremamente semplici che consentono di seguire da vicino lo sviluppo dei calcoli. Per questo motivo alcune delle equazioni già introdotte in precedenza verranno riscritte per facilitare la comprensione dell'approccio.

Iniziamo col precisare che l'ipotesi di onde relativamente lunghe si esprime mediante la relazione  $h/L < o(0.1)$ .

Immaginiamo dunque che il nostro battitore *a pistone* si muova con legge sinusoidale:

$$\xi^{(1)} = -\xi_0 \cos(\omega t) \quad [2.98]$$

che differisce solo per una costante di fase dalle analoghe relazioni di tipo sinusoidale introdotte in precedenza.

Dal sistema di equazioni differenziali al primo ordine, che non si ritiene utile ripetere in questa sede, si ottengono le ormai ben note relazioni (Biesel, 1951a):

$$\Phi^{(1)} = A \cosh[k_1(z + h)] \cos(k_1 x - \omega t) - \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos[k_m(z + h)] \exp(-k_m x) \quad [2.99]$$

$$a = \xi_0 \frac{\tanh(k_1 h)}{n_1} \quad [2.100]$$

$$n_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2 k_1 h}{\sinh(2 k_1 h)} \right] \quad [2.101]$$

già incontrate nella trattazione di Flick e Guza. In particolare l'equazione [2.100] e [2.101] rappresentano un'efficace sintesi analitica dell'espressione per generatore a pistone [2.25].

Come abbiamo già fatto notare in precedenza l'ipotesi di onde relativamente lunghe, cui corrisponde una distribuzione delle componenti orizzontali di velocità costante lungo la verticale, implica che le ampiezze dei modi evanescenti sono ridotte rispetto all'ampiezza dell'onda principale. In particolare Madsen, riportando i risultati delle esperienze condotte da Biésel negli anni 50, sostiene che quando la profondità relativa  $h/L$  è inferiore a 0.125, si ha:

$$\frac{|A_m|}{|A|} < 0.04 \quad [2.102]$$

Quindi limitandoci ad onde relativamente lunghe di modesta ampiezza si può scrivere:

$$\phi^{(1)} = \frac{a g \cosh[k_1(h+z)]}{\omega \cosh(k_1 h)} \cos(k_1 x - \omega t) \quad [2.103]$$

$$\eta^{(1)} = -a \sin(k_1 x - \omega t) \quad [2.104]$$

Riprendendo la scomposizione dei termini cinetici proposta nella [2.36] la soluzione del problema differenziale al secondo ordine fornisce:

$$\begin{aligned} \phi_B^{(2)} = & -\frac{3}{8} \omega a^2 \frac{\cosh[2k_1(h+z)]}{\sinh^4(k_1 h)} \sin[2(k_1 x - \omega t)] - \frac{\omega^2 a^2}{4 \sinh^2(k_1 h)} t \\ & - \frac{1}{2} \frac{\omega a^2 \cot gh(k_1 h)}{h} x \end{aligned} \quad [2.105]$$

$$\begin{aligned} \eta_B^{(2)} = & -a_B^{(2)} \cos[2(k_1 x - \omega t)] \\ = & -\frac{k_1 a^2}{4} \frac{[2 + \cosh 2(k_1 h)] \cosh(k_1 h)}{\sinh^3(k_1 h)} \cos[2(k_1 x - \omega t)] \end{aligned} \quad [2.106]$$

La componente libera del secondo ordine si ottiene sostituendo l'equazione [2.105] nella condizione al contorno aggiuntiva al battitore, che per un battitore di tipo a pistone si esprime come segue:

$$\left[ \frac{\partial \Phi_F^{(2)}}{\partial x} = - \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial x^2} \xi - \frac{\partial \Phi_B^{(2)}}{\partial x} \right]_{x=0} \quad [2.107]$$

L'Autore, coerentemente con l'ipotesi di onde lunghe, e quindi di assenza di dipendenza da "z", elimina la coordinata verticale effettuando una media delle quantità al secondo membro dell'equazione [2.107] lungo il fondale (ovvero tra  $-h$  e zero). Egli ottiene così:

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_F^{(2)}}{\partial x} = \omega a^2 \frac{\cotgh(k_1 h)}{h} \left[ \frac{3}{4 \sinh^2(k_1 h)} - \frac{n_1}{2} \right] \cos(2\omega t) \right\}_{x=0} \quad [2.108]$$

Anche se i calcoli non sono stati riportati nel dettaglio per brevità, è interessante notare che nello svolgimento di questi compare un termine nella forma:

$$\frac{1}{2} \omega a^2 \frac{\cotgh(k_1 h)}{h} (1 - n_1) \quad [2.109]$$

Quest'ultimo è stato trascurato in quanto si ha che per  $h/L=0.1$ ,  $(1 - n_1) \ll 1$ .

Come abbiamo più volte ripetuto, le onde libere secondarie hanno formalmente lo stesso meccanismo di generazione delle onde principali di piccola altezza. Immaginiamo ora un ideale battitore a pistone che si muova sinusoidalmente secondo la legge:

$$\xi = \xi_0 \sin(2\omega t) \quad [2.110]$$

Le onde lineari da esso generate dovrebbero rispettare la condizione al contorno al primo ordine:

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} = \frac{d\xi}{dt} = \xi_0 2\omega \cos(2\omega t) \quad [2.111]$$

Ora confrontando la [2.111] con la [2.108] si ottiene immediatamente:

$$\xi_0 2\omega = \omega a^2 \frac{\cotgh(k_1 h)}{h} \left[ \frac{3}{4 \sinh^2(k_1 h)} - \frac{n_1}{2} \right] \quad [2.112]$$

da cui si vede che il *semi-stroke* di questo battitore ideale vale:

$$\xi_0 = a^2 \frac{\cotgh(k_1 h)}{2 h} \left[ \frac{3}{4 \sinh^2(k_1 h)} - \frac{n_1}{2} \right] \quad [2.113]$$

Ma poiché deve essere per le onde libere:

$$a^L = \xi_0 \frac{\tanh(k_1 h)}{n_2} \quad [2.114]$$

Quindi l'ampiezza delle onde libere che cerchiamo:

$$a_F^{(2)} = a^2 \frac{\cotgh(k_2 h)}{2h} \left[ \frac{3}{4 \sinh^2(k_2 h)} - \frac{n_1}{2} \right] \frac{\tanh(k_2 h)}{n_2} \quad [2.115]$$

Con  $k_2$  tale che:

$$4\omega^2 = g k_2 \tanh(k_2 h) \quad [2.116]$$

e

$$n_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2k_2 h}{\sinh(k_2 h)} \right] \quad [2.117]$$

Inoltre dalla [2.108] si deduce facilmente che l'equazione del potenziale che regge l'onda libera del secondo ordine è:

$$\Phi_F^{(2)} = \frac{a_F^{(2)} g}{2\omega} \frac{\cosh[k_2(h+z)]}{\cosh(k_2 h)} \sin(k_2 x - 2\omega t) \quad [2.118]$$

da cui l'espressione del profilo:

$$\eta_F^{(2)} = a_F^{(2)} \cos(k_2 x - 2\omega t) \quad [2.119]$$

Ora confrontiamo la [2.119] con la [2.108]. Si può notare che la seconda è sfasata di  $(-\pi)$  rispetto alla prima, in acque basse. Tale risultato è in accordo con quanto proposto da Goda (1997) e riportato nel corso del paragrafo 2.3. Nel grafico di Figura 2.8 infatti, lo sfasamento tra le componenti libere si mantiene pari a  $(-\pi)$  sino proprio ad una profondità relativa  $h/L=0.1$ .

Appare ora particolarmente interessante discutere la validità della ipotesi di *relatively long waves*. In precedenza si è detto che tale ipotesi può considerarsi grossolanamente verificata ad una profondità relativa inferiore a 0.1.

In realtà Stokes (1847) sostenne che l'accuratezza della soluzione al secondo ordine poteva essere misurata dal rapporto tra l'ampiezza della correzione  $a_B^{(2)}$ , ed  $a$ .

Sfruttando l'equazione [2.106] si ha:

$$\frac{a_B^{(2)}}{a} = \frac{\frac{k_1 a^2}{4} \frac{[2 + \cosh 2(k_1 h)] \cosh(k_1 h)}{\sinh^3(k_1 h)}}{a} = \frac{k_1 a}{4} \frac{[2 + \cosh 2(k_1 h)] \cosh(k_1 h)}{\sinh^3(k_1 h)} \quad [2.120]$$

Chiaramente man mano che questo rapporto cresce tendendo all'unità, la soluzione di Stokes al secondo ordine diviene sempre meno soddisfacente, essendo in tal caso le

teorie di ordine superiore più convenienti (ad esempio la teoria di Stokes al III o IV ordine).

Per onde lunghe si può porre i coseno iperbolici pari all'unità mentre i seno iperbolici tendono al proprio argomento. Con queste semplificazioni si ha:

$$\frac{a_B^{(2)}}{a} = \frac{3}{16} \frac{aL^2}{\pi^2 h^3} \quad [2.121]$$

Poiché una condizione ragionevole di validità della teoria al secondo ordine è che il rapporto al primo membro sia molto minore di 1, si può dedurre che la trattazione sinora discussa sia valida fin tanto che:

$$\sigma_0 = \frac{aL^2}{h^3} \ll \frac{16}{3} \pi^2 \quad [2.122]$$

Il parametro  $\sigma_0$  è il numero di Ursell ed è un efficace indice di non linearità del moto ondoso.

Tuttavia secondo Madsen i confini di applicabilità della teoria sono contenuti all'interno di confini più ristretti rispetto a quelli della [2.122]. Egli sostiene che la teoria della *onda cnoidale*, (a cui si è fatto breve cenno nel paragrafo 1.4), interpreti meglio di quella di Stokes le caratteristiche delle onde in acque basse. I due approcci in realtà sono pressoché coincidenti sino a quando il rapporto tra l'ampiezza della correzione e la fondamentale si mantiene inferiore ad 1/4. Per valori più grandi infatti, l'onda di Stokes presenta una caratteristica cresta secondaria all'interno del cavo dell'onda. Ciò non avviene per l'onda cnoidale che è ritenuta come detto più affidabile. Dunque la condizione d'applicabilità della teoria diviene cautelativamente:

$$\sigma_0 = \frac{aL^2}{h^3} < \frac{4}{3} \pi^2 \quad [2.123]$$

## 2.5 Confronto tra le diverse soluzioni

Il grafico di Figura 2.11 mostra il confronto tra le soluzioni di Goda, Flick & Guza e Madsen. La figura riporta in ascisse la profondità relativa e in ordinate il rapporto tra l'ampiezza della onda libera del secondo ordine e la corrispondente ampiezza della correzione di Stokes. La curva relativa alla soluzione di Flick e Guza è stata dedotta graficamente in quanto, come ricordato in precedenza, gli Autori non hanno fornito le espressioni di calcolo. Nel complesso le curve relative agli approcci di Goda e Flick & Guza coincidono, mentre la soluzione fornita da Madsen nell'ipotesi di onde lunghe si colloca al di sotto delle precedenti. È utile peraltro osservare che quest'ultima soluzione approssima abbastanza bene le altre solo in acque basse, o tutto al più per  $k_1 h < 0.5$ , come mostrato dal grafico di dettaglio riportato in Figura 2.12. Questo risultato è senz'altro coerente in quanto, come abbiamo visto, la soluzione di Madsen muove dall'ipotesi che la distribuzione verticale delle velocità orizzontali sia costante,

ipotesi che risulta rigorosamente verificata solo quando  $k_1 h$  attinge valori non superiori a  $\frac{\pi}{10}$  (*shallow water*).

Certamente più sorprendente è il grafico di Figura 2.13 che confronta le soluzioni di Goda e Flick & Guza per un numero di modi evanescenti pari a 10. Qui la soluzione di Flick e Guza appare sovrastimare l'ampiezza dell'onda secondaria libera, rispetto alla soluzione di Goda, nel campo delle acque intermedie, ( $0.5 < k_1 h < 1.6$ ), per poi attingere un asintoto in acque alte senza l'inversione del segno della derivata caratteristico del grafico di Goda.

In realtà la differenza tra gli andamenti è sorprendente in considerazione del fatto che ciascuna curva rappresenta la soluzione di uno stesso sistema di equazioni differenziali. È quindi necessario un supplemento di analisi teorica, che tuttavia esula dagli obiettivi di questo lavoro, per comprenderne meglio le motivazioni.

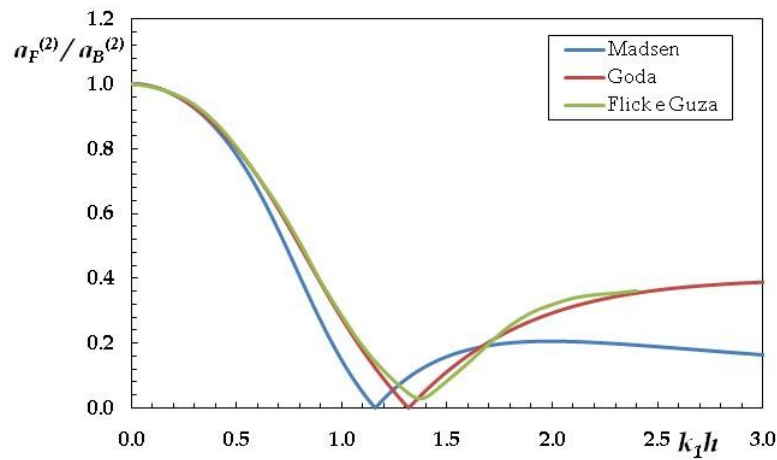


Figura 2.11. Confronto tra le soluzioni di Flick & Guza, Madsen e Goda per  $N=0$  modi evanescenti

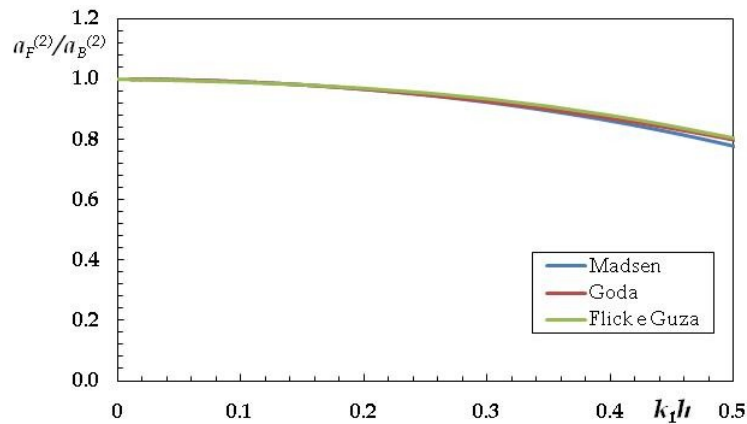


Figura 2.12. Dettaglio del confronto tra le soluzioni di Flick & Guza, Madsen e Goda per  $N=0$  modi evanescenti



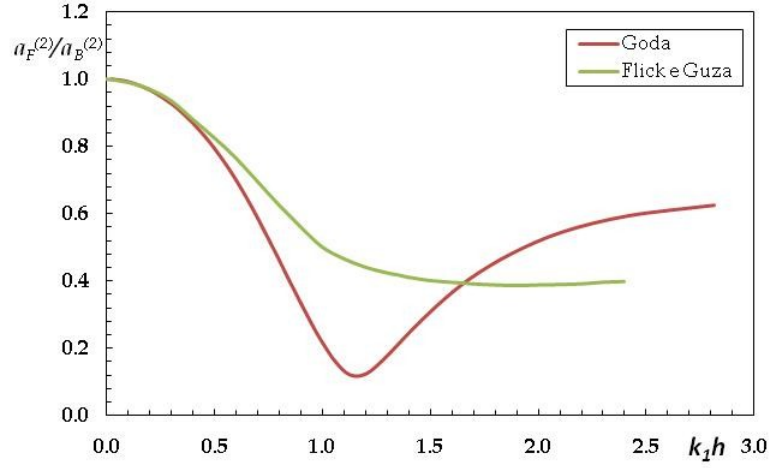


Figura 2.13. Confronto tra le soluzioni di Flick & Guza e Goda per N=10 modi evanescenti

## 2.6 Oscillazioni delle ampiezze di Fourier

Dalla teoria discussa nei paragrafi precedenti, appare chiaro che la superficie libera in una certa sezione del canale deriverà dalla sovrapposizione di onde di Stokes, onde libere secondarie ed onda di interferenza. Riproponendo le relazioni con la stessa notazione espressa da Goda (1998), si avrà:

$$\eta(x, t) = \eta^S(x, t) + \eta^F(x, t) + \eta^T(x, t) \quad [2.124]$$

$$\eta^S(x, t) = (a + a_{B1}) \cos(k_1 x - \omega t) + a_{B2} \cos(2k_1 x - 2\omega t) + a_{B3} \cos(3k_1 x - 3\omega t) \quad [2.125]$$

$$\eta^F(x, t) = a_{F2} \cos(k_2 x - 2\omega t + \alpha_{F2}) + a_{F3} \cos(2k_3 x - 3\omega t + \pi) \quad [2.126]$$

$$\eta^T(x, t) = a_{T1} \cos[(k_2 - k_1)x - \omega t + \alpha_{F2}] + a_{T3} \cos[(k_2 + k_1)x - 3\omega t + \alpha_{F2}] \quad [2.127]$$

Con:

$$\begin{cases} a_{B1} = \frac{1}{2} k_1^2 b_{11} a^3 & a_{B2} = k_1 b_{22} a^2 & a_{B3} = \frac{1}{2} k_1 b_{33} a^3 \\ & a_{F2} = k_2 b_{F2} a^2 & a_{F3} = \frac{1}{2} k_2^2 b_{F3} a^3 \\ a_{T1} = \frac{1}{2} k_2^2 b^{T1} a^3 & & a_{T3} = \frac{1}{2} k_2^2 b^{T3} a^3 \end{cases} \quad [2.128]$$

$$b_{F2} = \frac{1}{2} \beta_{F2} \sinh(k_2 h) \quad [2.62]$$

$$b_{F3} = \frac{1}{3} \beta_{F3} \sinh(3k_3 h) \quad [2.129]$$

$$\alpha_{F2} + \pi = \arctan\left(\frac{\beta_{FC}^2}{\beta_{FS}^2}\right) \quad [2.63]$$

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{1}{8}(3c_1^4 + 8c_1^2 - 9) \\ b_{22} = \frac{1}{4}(3c_1^3 - c_1) \\ b_{33} = \frac{3}{32}(9c_1^6 + 3c_1^4 + 3c_1^2 - 1) \end{cases} \quad [2.130]$$

$$b^{T1} = b_{F2} \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) \frac{(2c_2 + c_1)\coth[(k_2 - k_1)h] + 2c_2c_1 - 3}{\coth[(k_2 - k_1)h] - (4c_2 - c_1)} \quad [2.88]$$

$$b^{T3} = b_{F2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) \frac{3(2c_2 + c_1)\coth[(k_2 + k_1)h] + 2c_2c_1 - 7}{9\coth[(k_2 + k_1)h] - (4c_2 + c_1)} \quad [2.89]$$

$$\begin{cases} c_1 = \coth(k_1 h) \\ c_2 = \coth(k_2 h) \end{cases} \quad [2.90]$$

Le precedenti equazioni sono state scritte al fine di produrre un quadro sinottico dei risultati teorici; tuttavia alcune relazioni erano già state introdotte in precedenza e per questo motivo sono state trascritte con la stessa numerazione con la quale erano state indicate la prima volta. L'aspetto fondamentale delle equazioni [2.124] - [2.127] è quello di sottolineare l'esistenza di componenti ondose di diversa celerità. Le onde di Stokes si propagano, come sappiamo, con velocità di fase  $\frac{\omega}{k_1}$ , mentre le super-armoniche libere hanno celerità pari a  $\frac{2\omega}{k_2}$  e  $\frac{3\omega}{k_3}$  rispettivamente per le componenti di pulsazione  $2\omega$  e  $3\omega$ . Infine le onde di interferenza hanno celerità rispettivamente pari a  $\frac{\omega}{k_2 - k_1}$  e  $\frac{3\omega}{k_2 + k_1}$ . Naturalmente le [2.124] - [2.127] sono valide al terzo ordine di approssimazione di Stokes ma potrebbero ulteriormente essere complicate introducendo termini ancora di ordine superiore. Si vede quindi chiaramente che le componenti ondose posseggono celerità di fase differenti e ciò determina la *non permanenza del moto ondoso*. Ciò significa che le onde che saranno generate non avranno forma costante lungo il canale. La Figura 2.14, ripresa dal lavoro di Goda (1997), di seguito riportata, mostra con chiarezza la variazione della forma del profilo d'onda con il variare della posizione.

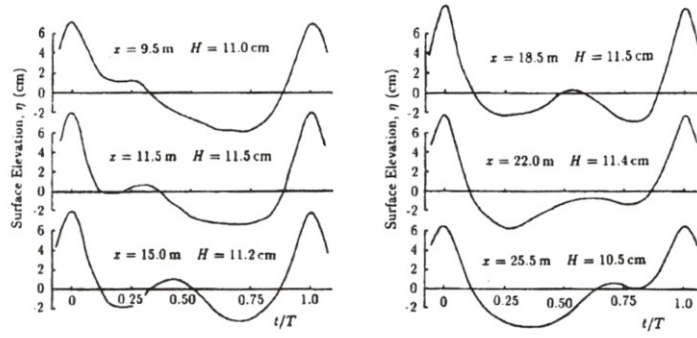


Figura 2.14. Esempio di non permanenza del moto ondoso e presenza di creste secondarie in posizioni variabili rispetto al profilo principale. Esempio ripreso da Goda 1997.

È necessario però svolgere qualche considerazione supplementare. Accanto al moto ondoso incidente, infatti, esisterà un movimento retrogrado del moto ondoso associato alla riflessione operata dall'estremità del canale opposta al battitore. In generale vengono installate delle spiagge assorbenti di modesta pendenza in grado di minimizzare tale effetto. Comunque il *coefficiente di riflessione lineare*  $K_R$ , rapporto tra l'ampiezza della componente principale di Stokes di frequenza  $\omega$  riflessa  $a_R$  e quella incidente  $a$ , è difficilmente di ordine inferiore a  $(k_1 a)$  che rappresenta il parametro perturbativo più utilizzato nella espansione di Stokes. Al campo di onde incidente espresso dalla [2.124] si sovrappone dunque un campo riflesso che avrà equazione:

$$\eta_R(x, t) = \eta_R^S(x, t) + \eta_R^F(x, t) + \eta_R^T(x, t) \quad [2.131]$$

con:

$$\begin{cases} \eta_R^S(x, t) \cong K_R \eta^S \\ \eta_R^F(x, t) = K_{RF2} \eta_F^{(2)} + K_{RF3} \eta_F^{(3)} \\ \eta_R^T(x, t) = K_{RT1} \eta_{T1}^{(3)} + K_{RT3} \eta_{T3}^{(3)} \end{cases} \quad [2.132]$$

In cui  $\eta_{T1}^{(3)}$  e  $\eta_{T3}^{(3)}$  rappresentano rispettivamente le componenti di pulsazione  $\omega$  e  $3\omega$  del moto ondoso d'interferenza [2.127]. Analogamente,  $\eta_F^{(2)}$  e  $\eta_F^{(3)}$  rappresentano le onde secondarie libere di frequenza doppia e tripla rispetto alla fondamentale. Nella equazione [2.132] è stata introdotta l'ulteriore ipotesi che il coefficiente di riflessione sia identico per tutte le componenti di Stokes. Ciò vuol dire che nota la componente "lineare" riflessa, le successive correzioni di Stokes (onde legate) potranno semplicemente calcolarsi mediante i coefficienti  $b_{11}, b_{22}, b_{33}$  trascritti in precedenza. Inoltre poiché il coefficiente di riflessione si riduce generalmente al ridursi del periodo, possiamo attenderci che:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_R = o(k_1 a) \\ K_{RT1} = o(K_R) = o(k_1 a) \\ K_{RF2} < K_R \Rightarrow K_{RF2} < o(k_1 a) \\ K_{RF3} = o(K_{RT3}) < K_{RF2} \end{array} \right. \quad [2.133]$$

Con queste ipotesi appena introdotte possiamo tentare di scrivere l'espressione globale del profilo ondosio:

$$\eta_G(x, t) = \eta(x, t) + \eta_R(x, t) \quad [2.134]$$

rispettivamente al secondo ed al terzo ordine di approssimazione.

Per quanto riguarda il secondo ordine si ha:

$$\begin{aligned} \eta_G(x, t) = & a \cos(k_1 x - \omega t) + K_R a \cos(k_1 x + \omega t + \varepsilon) + a_{B2} \cos[2(k_1 x - \omega t)] \\ & + a_{F2} \cos(k_2 x - 2\omega t + \alpha_{F2}) + o(k_1 a)^3 \end{aligned} \quad [2.135]$$

e per il terzo:

$$\begin{aligned} \eta_G(x, t) = & (a + a_{B1}) \cos(k_1 x - \omega t) + K_R a \cos(k_1 x + \omega t + \varepsilon) + a_{B2} \cos[2(k_1 x - \omega t)] \\ & + a_{F2} \cos(k_2 x - 2\omega t + \alpha_{F2}) \\ & + a_{B3} \cos[3(k_1 x - \omega t)] \\ & + a_{F3} \cos(2k_3 x - 3\omega t + \pi) + a_{T1} \cos[(k_2 - k_1)x - \omega t + \alpha_{F2}] \\ & + a_{T3} \cos[(k_2 + k_1)x - 3\omega t + \alpha_{F2}] + K_R a_{B2} \cos[2(k_1 x + \omega t + \varepsilon)] \\ & + o(k_1 a)^4 \end{aligned} \quad [2.136]$$

Ora è necessario ricordare che nella stragrande maggioranza dei casi i dati sperimentali concernenti il moto ondosio, ed in particolare quelli sulla fluttuazione della superficie libera, vengono analizzati applicando la serie di Fourier; in questo caso essa si applica alla funzione  $\eta$  descritta dalla [2.135] e [2.136].

Nel caso dell'approssimazione al secondo ordine, cui all'equazione [2.135], le ampiezze di Fourier di ordine  $\omega$  e  $2\omega$ , sono definite dalla seguente espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\omega^2 = a^2 [1 + K_R^2 + 2K_R \cos(2k_1 x + \varepsilon)] \\ a_{2\omega}^2 = (a_{B2} + a_{F2})^2 + 4a_{B2}a_{F2} \cos^2 \left[ \left( \frac{k_2}{2} - k_1 \right) x + \frac{\alpha_{F2}}{2} \right] \end{array} \right. \quad [2.137]$$

Al terzo ordine l'analisi è piuttosto complessa. Tuttavia una soluzione approssimata è stata fornita da Goda (1997) nell'ipotesi che  $K_R$  fosse piccolissimo, dell'ordine di  $o(a^3)$ . L'Autore propone:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\omega}^2 \cong (a + a_{B1} - a_{T1})^2 + 4a_{T1}(a + a_{B1})\cos^2 \left[ \left( \frac{k_2}{2} - k_1 \right) x + \frac{\alpha_{F2}}{2} \right] \\ a_{2\omega}^2 \cong (a_{B2} - a_{F2})^2 + 4a_{B2}a_{F2}\cos^2 \left[ \left( \frac{k_2}{2} - k_1 \right) x + \frac{\alpha_{F2}}{2} \right] \\ a_{3\omega}^2 \cong (a_{B3} - a_{F3} - a_{T3})^2 + 4a_{T3}(a_{B3} - a_{F3})\cos^2 \left[ \left( \frac{k_2}{2} - k_1 \right) x + \frac{\alpha_{F2}}{2} \right] \end{array} \right. \quad [2.138]$$

Dall'equazione [2.137] si deriva immediatamente che, al secondo ordine di approssimazione ed in accordo con le ipotesi introdotte in precedenza, l'ampiezza di Fourier, associata alla frequenza fondamentale, dovrebbe oscillare lungo l'asse del canale (asse  $x$ ) con una lunghezza d'onda:

$$l_{\omega} = \frac{\pi}{k_1} = \frac{L}{2} \quad [2.139]$$

attingendo i valori estremi  $a(1 + K_R)$  e  $a(1 - K_R)$ .

L'ampiezza associata alla frequenza  $2\omega$ , invece, fluttua con lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{\pi}{0.5k_2 - k_1} \quad [2.140]$$

tra i valori  $(a_{B2} + a_{F2})$  e  $(a_{B2} - a_{F2})$ . Si ricorda a tal proposito che dalla teoria si ricava  $a_{B2} \geq a_{F2}$ , valendo il simbolo di uguaglianza per  $k_1 h \rightarrow 0$ . Si noti che  $l_{\omega} \leq \lambda$ . In acque alte le due grandezze sono uguali, mentre in acque basse  $\lambda \rightarrow \infty$  e contemporaneamente  $l \rightarrow 0$  (Figura 2.15). Quindi su fondali limitati, si ha generalmente che  $l \ll \lambda$ .

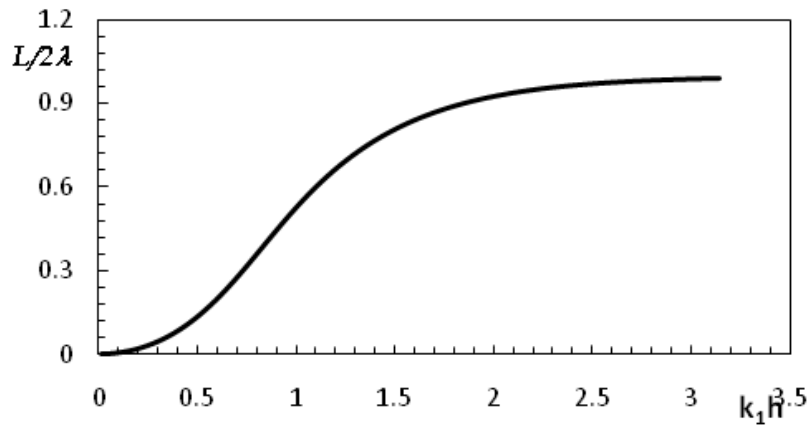


Figura 2.15. Andamento del rapporto tra  $L/2$  e la lunghezza di ricorrenza  $\lambda$  in funzione di  $k_1 h$ .

Nel caso dell'approssimazione al terzo ordine proposta da Goda nell'Equazione [2.138], si suppone come detto che gli effetti non lineari, d'interferenza e di Stokes, siano molto più importanti di quelli della riflessione. In tal caso tutte le ampiezze di Fourier oscillano con lunghezza di ricorrenza pari a  $\lambda$ . Le ampiezze della seconda e

della terza armonica (l'ampiezza della seconda armonica coincide con quella della [2.137]), attingono un massimo per:

$$\left(\frac{k_2}{2} - k_1\right)x + \frac{\alpha_{F2}}{2} = m\pi \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots \quad [2.141]$$

ed il minimo per:

$$\left(\frac{k_2}{2} - k_1\right)x + \frac{\alpha_{F2}}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots \quad [2.142]$$

La seconda e la terza componente oscillano dunque all'unisono.

La fondamentale invece, a causa del fatto che  $a_{T1}$  è sempre negativa, attinge il massimo nei punti di equazione [2.142] ed il minimo nei punti di equazione [2.141]. Quest'ultima è quindi sfasata di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto alle altre due.

## Capitolo 3. Le barriere sommerse come sistemi a risposta non lineare

### 3.1 Generalità

In questo capitolo verrà affrontato l'argomento centrale del presente lavoro di ricerca, ossia l'interazione tra moto ondoso regolare e barriere sommerse. Ripercorrendo in dettaglio una serie di studi presenti in letteratura, sarà evidenziato come le strutture sommerse, oltre a favorire una riduzione dell'energia d'onda incidente, inducano profonde alterazioni del campo d'onda trasmesso, sia in presenza che in assenza di frangimento, favorendo la generazione di onde secondarie che interferiscono, nell'area protetta, con la componente ondosa fondamentale.

Il capitolo è strutturato in due parti distinte. Nella prima si affronterà il problema da un punto di vista teorico discutendo in dettaglio le soluzioni proposte da Massel (1983) e da Goda (1999); gli Autori affrontano l'argomento come un'estensione del problema della propagazione in cui il campo di moto presenta forti discontinuità, rappresentate in questo caso da una brusca variazione di fondale dovuta alla presenza della barriera.

Entrambi gli Autori seguirono un approccio perturbativo per risolvere il sistema di equazioni che regge il problema del moto in esame e proposero soluzioni di fondamentale importanza per capire dal punto di vista qualitativo il complesso meccanismo di interazione onda barriera. Tali soluzioni sono però di difficile utilizzo nelle pratica per la loro complessità formale e comunque, oltre a fare riferimento ad uno schema di barriera sommersa alquanto semplificato, non tengono conto del frangimento.

Come si avrà modo di vedere, i risultati saranno sostanzialmente molto simili a quelli ottenuti dalla teoria del generatore d'onda non lineare; anche in questo caso, la presenza della discontinuità del campo di moto (la quale nel Capitolo 2 era indotta dal movimento della pala meccanica dell'ondogeno), origina una scomposizione dell'onda incidente in diverse armoniche di frequenza multipla rispetto all'onda fondamentale. Una parte di tali componenti secondarie è legata a quella principale (*bound waves*) ed un'altra, invece, viaggia con celerità indipendente rispetto alle precedenti (*free waves*).

Nella seconda parte del capitolo saranno descritti alcuni studi presenti in letteratura [Grue (1992), Losada et al. (1997), Brossard e Chagdali (2001)], considerati da chi scrive più rappresentativi, che analizzano per via sperimentale il processo di interazione non lineare tra moto ondoso e modelli fisici di strutture sommerse. Grue (1992) investigò in laboratorio il processo di trasmissione dietro un ostacolo sommerso con onde frangenti e non-frangenti sperimentando però un caso molto semplice di barriera rettangolare impermeabile. Ad ogni modo l'Autore, ponendo alcune importanti semplificazioni, riuscì, attraverso tecniche di analisi spettrale, ad isolare le componenti armoniche libere giungendo alle prime valutazioni del fenomeno su base sperimentale.

Losada et al. (1997) studiarono, invece, per onde non frangenti, l'influenza della permeabilità sul processo di generazione delle super-armoniche mostrando gli effetti che l'interazione tra armoniche legate ed armoniche libere hanno sulle forme del profilo d'onda trasmesso. Infine, Brossard e Chagdali (2001) descrivono

dettagliatamente il fenomeno in presenza di una piastra orizzontale sommersa documentando principalmente l'influenza che la frequenza fondamentale dell'onda incidente e la sommergenza relativa della piastra hanno sulla produzione di onde libere.

### 3.2 Soluzione teorica di Massel (1983)

A Massel (1980) è dovuta la formulazione teorica, corretta al secondo ordine di approssimazione, del problema differenziale di un'onda che si propaga al di sopra di una soglia impermeabile sommersa, di lunghezza finita ed infinita. I risultati teorici dell'Autore, ottenuti mediante l'utilizzo del metodo perturbativo, mostrano che in acque basse, sul gradino, vengono generate armoniche di ordine superiore trasmesse, successivamente, nella zona di acque profonde come *free waves*.

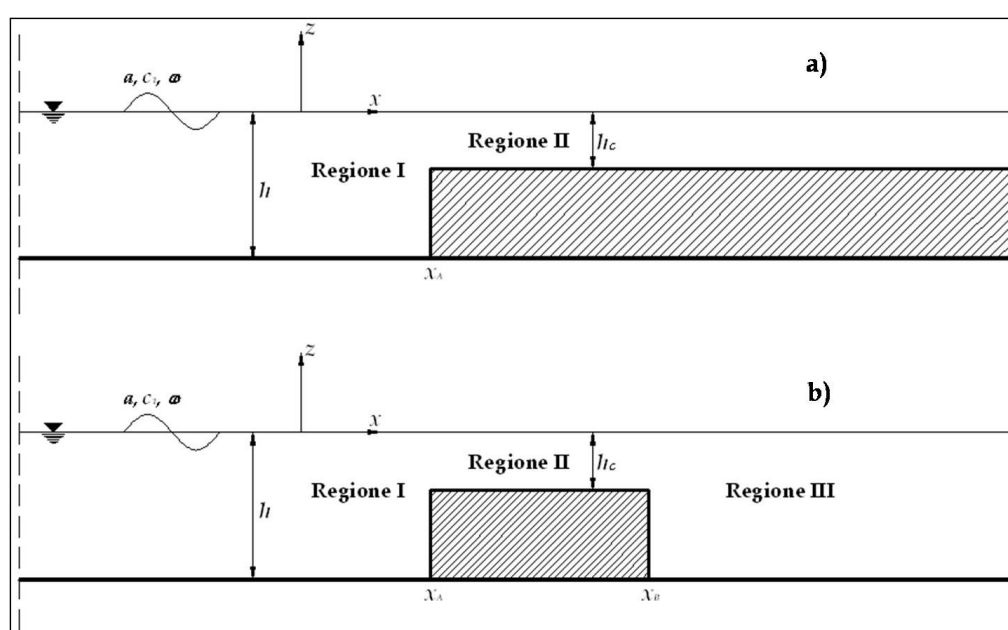


Figura 3.1. Schematizzazione geometrica del problema.

In Figura 3.1 è rappresentato il dominio spaziale del campo di moto nel caso di una soglia sommersa di lunghezza infinita e di uno scalino di lunghezza finita. Sia  $h$  la profondità al largo ed, eventualmente, a tergo dell'ostacolo e sia  $h_c$  la profondità al di sopra della soglia. L'interazione tra soglia e moto ondoso genererà sia un'onda riflessa dalla superficie verticale dell'ostacolo, sia un'onda trasmessa a tergo dello stesso.

Con riferimento allo schema mostrato in Figura, l'onda si propaga nel verso positivo dell'asse delle  $x$ , preso coincidente con il livello di quiete, mentre l'asse  $z$  è verticale. La barriera sommersa (Figura 3.1b) occupa una regione cui corrisponde:

$$x_A \leq x \leq x_B \quad \text{e} \quad -h \leq z \leq -h_c \quad [3.1]$$

Nel caso di gradino infinito (Figura 3.1a), invece, la dimensione orizzontale è delimitata dalla seguente:

$$x \geq x_A \quad [3.2]$$



La presenza della barriera delimita tre zone (o due nel caso di scalino indefinito) del campo di moto. Si indicheranno con Regione I, II e III (vedi Figura 3.1) rispettivamente, le zone al largo del gradino, al di sopra del gradino ed, eventualmente, a tergo del gradino.

Considerando valide tutte le ipotesi alla base della teoria di Stokes, il problema differenziale può essere così formulato:

$$\nabla \nabla \Phi = 0 \quad [3.3a]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{z=\eta} \quad [3.3b]$$

$$\left[ \eta + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \right]_{z=\eta} \quad [3.3c]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \right]_{z=-h} ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sulla superficie della barriera} \quad [3.3d]$$

Nella [3.3d]  $\mathbf{n}$  rappresenta il versore normale alla superficie della barriera.

Si suppone che un'onda di ampiezza finita si propaghi da  $x = -\infty$  verso il gradino sommerso. Pertanto, effettuando una correzione al secondo ordine, la funzione del profilo libero e del potenziale di velocità si esprimeranno nel modo seguente:

$$\eta_i = \eta_i^{(1)} + \eta_i^{(2)} = a \cos(k_1 x - \omega t) + (k_1 a) a \frac{\cosh[k_1(h+z)] [2 + \cosh 2k_1 h]}{4 \sinh^3(k_1 h)} \cos[2(k_1 x - \omega t)] \quad [3.4]$$

$$\begin{aligned} \Phi_i = \Phi_i^{(1)} + \Phi_i^{(2)} = \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_1(h+z)]}{\cosh(k_1 h)} \cdot \sin(k_1 x - \omega t) \\ + \frac{3}{8} (k_1 a) \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[2k_1(h+z)]}{\sinh^3(k_1 h) \cosh(k_1 h)} \cdot \sin[2(k_1 x - \omega t)] \end{aligned} \quad [3.5]$$

Nelle relazioni precedenti,  $a$  e  $\omega$  rappresentano rispettivamente l'ampiezza dell'onda e la frequenza angolare dell'onda fondamentale. Le equazioni [3.4] e [3.5] descrivono il moto dell'onda generata da un battitore ideale in un canale di laboratorio e per tale ipotesi viene trascurata la contaminazione indotta dal movimento della pala del generatore d'onda, fenomeno esaustivamente studiato del capitolo precedente.

Alle condizioni [3.3a-d], che devono essere verificate in tutto il dominio di integrazione, si aggiungono ulteriori condizioni di congruenza dovute alla presenza della discontinuità del campo di moto, rappresentata dallo scalino sommerso. In corrispondenza dei contorni delle Regioni I, II e III si pone:

$$\Phi_I = \Phi_{II} \quad x = x_A \quad [3.6a]$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} & x = x_A \quad z \in [-h_c, 0] \\ 0 & x = x_A \quad z \in [-h, -h_c] \end{cases} \quad [3.6b]$$

e, nel caso di ostacolo di lunghezza finita, si aggiunge:

$$\Phi_{II} = \Phi_{III} \quad x = x_B \quad [3.7a]$$

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial x} & x = x_B \quad z \in [-h_c, 0] \\ 0 & x = x_B \quad z \in [-h, -h_c] \end{cases} \quad [3.7b]$$

Adoperando l'approccio perturbativo di Stokes, espandendo quindi in serie di potenze del parametro  $\varepsilon = k_1 a$  le grandezze cinematiche incognite e raggruppando i termini del medesimo ordine, si ottengono le equazioni necessarie alla risoluzione del problema per ogni ordine di approssimazione. Si ricorda che, espandendo in serie di Mac Laurin le equazioni [3.3b] e [3.3c], è possibile calcolare le stesse in corrispondenza del livello imperturbato  $z = 0$ .

### 3.2.1 La soluzione al primo ordine

Il problema differenziale al primo ordine assume la forma seguente:

$$\nabla \nabla \Phi^{(1)} = 0 \quad [3.8a]$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} \right]_{z=0} \quad [3.8b]$$

$$\left[ \eta^{(1)} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} = 0 \right]_{z=0} \quad [3.8c]$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad [3.8d]$$

Al sistema [3.8a-d] si aggiungono le [3.6] e [3.7] riscritte al primo ordine di approssimazione:

$$\Phi_I^{(1)} = \Phi_{II}^{(1)} \quad x = x_A \quad [3.9a]$$

$$\frac{\partial \Phi_I^{(1)}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{II}^{(1)}}{\partial x} & x = x_A \quad z \in [-h_c, 0] \\ 0 & x = x_A \quad z \in [-h, -h_c] \end{cases} \quad [3.9b]$$

e, nel caso di ostacolo di lunghezza finita:

$$\Phi_{II}^{(1)} = \Phi_{III}^{(1)} \quad x = x_B \quad [3.10a]$$

$$\frac{\partial \Phi_{II}^{(1)}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{III}^{(1)}}{\partial x} & x = x_B \quad z \in [-h_c, 0] \\ 0 & x = x_B \quad z \in [-h, -h_c] \end{cases} \quad [3.10b]$$

In ciascuna delle tre zone in cui è suddiviso il campo di moto, la soluzione del problema comprende una parte che descrive onde di tipo progressivo ed un'altra che descrive infiniti modi evanescenti che producono oscillazioni locali in corrispondenza delle superfici di confine. Alla luce di quanto detto, risulta conveniente scomporre il moto, in ogni regione del campo, in onde progressive  $[\Phi^{(1)P}]$  ed onde locali  $[\Phi^{(1)L}]$ . La soluzione al primo ordine nella Regione I è la seguente:

$$\Phi_I^{(1)} = \Phi_I^{(1)P} + \Phi_I^{(1)L} \quad [3.11]$$

In cui:

$$\begin{aligned} \Phi_I^{(1)P} = & \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_1(h+z)]}{\cosh(k_1 h)} \cdot \sin(k_1 x - \omega t) + \\ & - |R_{k_1}^{(1)}| \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_1(h+z)]}{\cosh(k_1 h)} \cdot \sin(k_1 x + \omega t + \psi_I^{(1)}) \end{aligned} \quad [3.12]$$

$$\Phi_I^{(1)L} = \frac{ag}{\omega} \cdot \text{Im} \left[ \sum_{\alpha} |R_{\alpha}^{(1)}| e^{\alpha(x-x_A)} \frac{\cos \alpha(h+z)}{\cosh \alpha h} \cdot \sin(\varphi_{R_{\alpha}} - \omega t) \right] \quad [3.13]$$

Nella [3.12] il primo ed il secondo termine al secondo membro rappresentano, rispettivamente, l'onda incidente e quella riflessa; il coefficiente incognito  $R_{k_1}^{(1)}$  è un numero complesso il cui modulo rappresenta il rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa e l'ampiezza dell'onda incidente, mentre l'argomento è legato alla differenza di fase delle due onde:

$$\psi_I^{(1)} = \arg [R_{k_1}^{(1)}] + k_1 x_A \quad [3.14]$$

Il numero d'onda  $k_1$  soddisfa la relazione di dispersione lineare:

$$\omega^2 = g k_1 \tanh(k_1 h) \quad [3.15]$$

Nella [3.13] "Im" rappresenta la parte immaginaria del numero complesso. Ogni addendo dell'infinita somma che compare al secondo membro della [3.13] corrisponde a valori di  $\alpha$  che soddisfano la seguente:

$$\omega^2 = -g\alpha \cdot \tanh(\alpha \hbar) \quad [3.16]$$

Sicché, ad ogni valore di  $\alpha$  corrisponde un coefficiente di riflessione per i modi evanescenti  $R_\alpha^{(1)}$  che assume lo stesso significato di quello relativo all'onda progressiva. Si avrà quindi che:

$$\varphi_{R_\alpha} = \arg \left[ R_\alpha^{(1)} \right] \quad [3.17]$$

In maniera analoga si esprimono le soluzioni nella Regione II, che sono le seguenti:

$$\Phi_{II}^{(1)} = \Phi_{II}^{(1)P} + \Phi_{II}^{(1)L} \quad [3.18]$$

In cui:

$$\begin{aligned} \Phi_{II}^{(1)P} = & \left| P_{k_{1c}}^{(1)} \right| \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_{1c}(h_c + z)]}{\cosh(k_{1c}h_c)} \cdot \sin(k_{1c}x - \omega t + \psi_P^{(1)}) + \\ & - \left| Q_{k_{1c}}^{(1)} \right| \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_{1c}(h_c + z)]}{\cosh(k_{1c}h_c)} \cdot \sin(k_{1c}x + \omega t + \psi_Q^{(1)}) \end{aligned} \quad [3.19]$$

$$\begin{aligned} \Phi_{II}^{(1)L} = & \frac{ag}{\omega} \cdot \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\alpha_t} \left[ \left| P_{\alpha_c}^{(1)} \right| e^{-\alpha_c(x-x_A)} \cdot \sin(\varphi_{P_{\alpha_c}} - \omega t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left| Q_{\alpha_c}^{(1)} \right| e^{-\alpha_c(x-x_B)} \cdot \sin(\varphi_{Q_{\alpha_c}} - \omega t) \right] \frac{\cos \alpha_c(h_c + z)}{\cosh \alpha_c h_c} \right\} \end{aligned} \quad [3.20]$$

dove :

$$\psi_P^{(1)} = \arctan \left[ P_{k_{1c}}^{(1)} \right] - k_{1c}x_A \quad [3.21a]$$

$$\psi_Q^{(1)} = \arctan \left[ Q_{k_t}^{(1)} \right] - k_{1c}x_B \quad [3.21b]$$

$$\varphi_{P_{\alpha_c}}^{(1)} = \arctan \left[ P_{\alpha_t}^{(1)} \right] \quad [3.21c]$$

$$\varphi_{Q_{\alpha_c}}^{(1)} = \arctan \left[ Q_{\alpha_t}^{(1)} \right] \quad [3.21d]$$

Si noti che  $k_{1c}$  ed  $\alpha_c$  rispettano la seguenti relazioni di dispersione lineare:

$$\omega^2 = gk_{1c} \cdot \tanh(k_{1c} \hbar_c) \quad [3.22a]$$

$$\omega^2 = -g\alpha_c \cdot \tanh(\alpha_c \hbar_c) \quad [3.22b]$$

Si osserva che, tanto la componente progressiva quanto quella evanescente presentano due termini. Il primo, rappresenta l'onda trasmessa dalla Regione I alla Regione II, mentre il secondo descrive un'onda riflessa, quindi retrograda, in corrispondenza della

sezione  $x = x_B$ . Nel caso di soglia infinita la componente retrograda è assente e di conseguenza nelle [3.19] e [3.20] i secondi termini saranno nulli.

Alla luce di quanto detto il coefficiente  $P_{k_{1c}}^{(1)}$  è il coefficiente di trasmissione dalla Regione I alla II, mentre  $Q_{k_{1c}}^{(1)}$  è il coefficiente di riflessione in corrispondenza della sezione  $x = x_B$ .

Infine, per il caso di soglia finita, nella Regione III il potenziale di velocità si può esprimere nel modo seguente:

$$\Phi_{III}^{(1)} = \Phi_{III}^{(1)P} + \Phi_{III}^{(1)L} \quad [3.23]$$

In cui:

$$\Phi_{III}^{(1)P} = |T_{k_1}^{(1)}| \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k_1(h+z)]}{\cosh(k_1 h)} \cdot \sin(k_1 x - \omega t + \psi_T^{(1)}) \quad [3.24]$$

$$\Phi_{III}^{(1)L} = \frac{ag}{\omega} \cdot \text{Im} \left[ \sum_{\alpha} |T_{\alpha}^{(1)}| e^{\alpha(x_B - x)} \frac{\cos \alpha(h+z)}{\cosh \alpha h} \cdot \sin(\varphi_{T_{\alpha}} - \omega t) \right] \quad [3.25]$$

Nella Regione III il moto ondoso è formato da un'onda trasmessa dalla Regione II nella zona protetta dalla barriera. Il campo risultante è dato, anche in questo caso, da una parte progressiva, con coefficiente di trasmissione pari al modulo del numero complesso  $T_{k_1}^{(1)}$ , e da una parte evanescente, con coefficiente di trasmissione pari al modulo del numero complesso  $T_{\alpha}^{(1)}$ . Analogamente a quanto illustrato precedentemente, valgono le seguenti:

$$\psi_T^{(1)} = \arctan [T_{k_1}^{(1)}] - k_1 x_B \quad [3.26a]$$

$$\varphi_{T_{\alpha}}^{(1)} = \arctan [T_{\alpha}^{(1)}] \quad [3.26b]$$

Una volta formulato il problema del moto al primo ordine e scritto le soluzioni per ogni regione delimitata dall'ostacolo sommerso, è utile evidenziare che i coefficienti di riflessione e trasmissione rappresentano delle incognite del problema. Il valore di tali incognite si ottiene sfruttando le equazioni di congruenza in corrispondenza degli spigoli della barriera sommersa. In particolare, per quel che concerne la parte progressiva del moto, il numero di incognite è quattro  $[R_{k_1}^{(1)}, P_{k_{1c}}^{(1)}, Q_{k_{1c}}^{(1)}, T_{k_1}^{(1)}]$  per lo scalino finito e due  $[R_{k_1}^{(1)}, P_{k_{1c}}^{(1)}]$  per quello infinito. Per queste incognite sono disponibili due condizioni per ogni superficie di separazione. Per quel che riguarda invece la parte evanescente, le incognite sono  $\infty^4$   $[R_{\alpha}^{(1)}, P_{\alpha c}^{(1)}, Q_{\alpha c}^{(1)}, T_{\alpha}^{(1)}]$  per la soglia finita e  $\infty^2$   $[R_{\alpha}^{(1)}, P_{\alpha c}^{(1)}]$  per quella infinita. In corrispondenza delle due superfici di separazione sono disponibili  $\infty^2$  condizioni ottenute applicando le relazioni di congruenza per ogni valore di  $\alpha$ . Il sistema di equazioni, quindi, necessario alla determinazione dei coefficienti di riflessione e trasmissione, risulta determinato. Lo sviluppo delle equazioni è omissso per brevità.

### 3.2.2 La soluzione al secondo ordine

Il problema differenziale al secondo ordine è retto dal seguente sistema di equazioni:

$$\nabla \nabla \Phi^{(2)} = 0 \quad [3.27a]$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} = C_1[\Phi^{(1)}] \right\}_{z=0} \quad [3.27b]$$

$$\left\{ g\eta^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} = C_2[\Phi^{(1)}] \right\}_{z=0} \quad [3.27c]$$

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} = 0 \quad z = -h \quad [3.27d]$$

Nelle equazioni [3.27b-c] i termini  $C_1[\Phi^{(1)}]$  e  $C_2[\Phi^{(1)}]$  dipendono dalla soluzione al primo ordine. Tali quantità rappresentano le forzanti del sistema non omogeneo al secondo ordine.

Analogamente a quanto fatto per la soluzione al primo ordine, è necessario definire le relazioni di congruenza in corrispondenza degli spigoli *in-shore* ed *off-shore* dell'ostacolo sommerso, questa volta però espresse al secondo ordine di approssimazione. Si pone dunque:

$$\Phi_I^{(2)} = \Phi_{II}^{(2)} \quad x = x_A \quad [3.28a]$$

$$\frac{\partial \Phi_I^{(2)}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{II}^{(2)}}{\partial x} & x = x_A \quad z \in [-h_c, 0] \\ 0 & x = x_A \quad z \in [-h, -h_c] \end{cases} \quad [3.28b]$$

e, nel caso di ostacolo di lunghezza finita:

$$\Phi_{II}^{(2)} = \Phi_{III}^{(2)} \quad x = x_B \quad [3.29a]$$

$$\frac{\partial \Phi_{II}^{(2)}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{III}^{(2)}}{\partial x} & x = x_B \quad z \in [-h_c, 0] \\ 0 & x = x_B \quad z \in [-h, -h_c] \end{cases} \quad [3.29b]$$

Essendo le equazioni [3.27a-d] lineari nelle incognite  $\Phi^{(2)}$  e  $\eta^{(2)}$  è possibile, analogamente a quanto fatto nella teoria del generatore d'onda, scomporre le soluzioni nella seguente maniera:

$$\Phi^{(2)} = \tilde{\Phi}^{(2)} + \Phi^{F(2)} \quad [3.30]$$

Nella [3.30]  $\tilde{\Phi}^{(2)}$  rappresenta la soluzione del sistema differenziale non omogeneo forzato dalla soluzione al primo ordine ed in cui non si tiene conto delle relazioni di congruenza agli spigoli dell'ostacolo sommerso. Come ampiamente trattato nel Capitolo 2, anche in questo caso, tale componente del moto ondoso, di frequenza angolare  $2\omega$ , risulta legata all'oscillazione fondamentale di frequenza  $\omega$ .  $\tilde{\Phi}^{(2)}$  rappresenta dunque una *bound wave*.

Il secondo addendo della [3.30],  $\Phi^{F(2)}$ , rappresenta, invece, la soluzione del sistema differenziale omogeneo associato alle [3.27a-d], nella cui risoluzione si tiene conto delle relazioni di congruenza [3.28a-b] e [3.29a-b].  $\Phi^{F(2)}$  rappresenta quindi una soluzione di un'onda libera (*free waves*) di frequenza angolare  $2\omega$ , che si propaga con celerità indipendente rispetto all'onda fondamentale.

Analogamente al campo di moto del primo ordine, i risultati saranno differenziati per le Regioni I, II e III.

Il campo di moto nella Regione I sarà retto dalla seguente funzione potenziale di velocità:

$$\Phi_I^{(2)} = \tilde{\Phi}_I^{(2)} + \Phi_I^{F(2)} \quad [3.31]$$

La componente legata alla fondamentale si esprime nel modo seguente:

$$\tilde{\Phi}_I^{(2)} = \Phi_I^{P(2)} + \left[ \sum_{\alpha} \Phi_{I\alpha}^{(2)} + \sum_{\alpha, \alpha'} \Phi_{I\alpha\alpha'}^{(2)} + \sum_{\alpha} \Phi_{I\alpha k_1}^{(2)} \right] \quad [3.32]$$

Il potenziale  $\Phi_I^{P(2)}$  rappresenta la parte progressiva dell'onda legata ed è esprimibile come la correzione di Stokes al II ordine ampiamente trattata nei capitoli precedenti:

$$\Phi_I^{P(2)} = \frac{3}{8} \omega a^2 \cdot \frac{\cosh[2k_1(h+z)]}{\sinh^4(2k_1 h)} \cdot \left\{ \sin[2(k_1 x - \omega t)] + |R_{k_1}^{(1)}|^2 \sin[2(k_1 x + \omega t)] \right\} \quad [3.33]$$

I termini tra parentesi quadre nella [3.32] sono le componenti locali dell'onda legata; essi rappresentano i modi evanescenti del secondo ordine e dipendono dai coefficienti di riflessione del primo ordine. Le loro espressioni sono state omesse per brevità; esse sono reperibili in S. R. Massel (1983).

La seconda parte del campo di moto totale [3.31], consta di onde libere di pulsazione  $2\omega$ . La loro espressione è la seguente:

$$\Phi_I^{F(2)} = \text{Im} \left[ \frac{a g}{2\omega} R_{k_2}^{(2)} \frac{\cosh[k_2(h+z)]}{\cosh(k_2 h)} \cdot e^{-ik_2(x-x_A)} e^{-i2\omega t} + \right.$$

$$+ \sum_{\beta} \frac{a g}{2\omega} \cdot R_{\beta}^{(2)} \frac{\cosh[\beta(h+z)]}{\cosh(\beta h)} \cdot e^{\beta(x-x_A)} e^{-i2\omega t} \Bigg] \quad [3.34]$$

Il primo addendo rappresenta la parte di onda libera propagativa, mentre il secondo i modi evanescenti. Appare chiaro, osservando la [3.34] che le *free waves* in Regione I sono generate dalla riflessione in corrispondenza della superficie verticale di sezione  $x = x_A$ . Tali onde libere sono onde retrograde e si propagano nel verso delle  $x$  negative. I coefficienti di riflessione sono numeri complessi del secondo ordine.

Si noti che  $k_2$  e  $\beta$  seguono le seguenti relazioni di dispersione lineare:

$$(2\omega)^2 = g k_2 \tanh(k_2 h) \quad [3.35]$$

$$(2\omega)^2 = -g\beta \cdot \tanh(\beta h) \quad [3.36]$$

In corrispondenza della cresta della struttura, Regione II, la soluzione del moto si può esprimere in una forma analoga alla precedente:

$$\Phi_{II}^{(2)} = \tilde{\Phi}_{II}^{(2)} + \Phi_{II}^{F(2)} \quad [3.37]$$

$$\tilde{\Phi}_{II}^{(2)} = \Phi_{II}^{P(2)} + \left[ \sum_{\alpha_c} \Phi_{II\alpha_c}^{(2)} + \sum_{\alpha_c, \alpha'_c} \Phi_{II\alpha_c\alpha'_c}^{(2)} + \sum_{\alpha_c} \Phi_{II\alpha_c k_{1c}}^{(2)} \right] \quad [3.38]$$

Come per la [3.32] anche nella [3.38]  $\Phi_{II}^{P(2)}$  rappresenta la correzione di Stokes al II ordine riferita al fondale  $h_c$ . Tale componente si esprime infatti come segue:

$$\begin{aligned} \Phi_{II}^{P(2)} = \frac{3}{8} \omega a^2 \cdot \frac{\cosh[2k_{1c}(h_c + z)]}{\sinh^4(2k_{1c}h_c)} \cdot \left\{ |P_{k_{1c}}^{(1)}|^2 \sin[2(k_{1c}x - \omega t)] + \right. \\ \left. + |Q_{k_{1c}}^{(1)}|^2 \sin[2(k_{1c}x + \omega t)] \right\} \end{aligned} \quad [3.39]$$

Dove  $k_{1c}$  segue la relazione di dispersione lineare di cui alla [3.22a].

La seconda parte di onde del complesso di oscillazioni legate alla fondamentale sono costituite da infiniti modi evanescenti, in parte retrogradi ed in parte trasmessi, che vengono generati in corrispondenza degli spigoli *in-shore* ed *off-shore* della barriera impermeabile. La struttura formale delle relazioni che esprimono tali moti locali è lunga e complessa e per questo si rimanda direttamente al lavoro di Massell (1983) come riferimento bibliografico.

Il potenziale della *free wave* nella Regione II si esprime nella maniera seguente:

$$\Phi_{II}^{F(2)} = \text{Im} \left\{ \frac{ag}{2\omega} \left[ P_{k_{2c}}^{(2)} e^{-ik_{2c}(x_A - x)} e^{-i2\omega t} + Q_{k_{2c}}^{(2)} e^{-ik_{2c}(x - x_B)} \right] \frac{\cosh[k_{2c}(h_c + z)]}{\cosh(k_{2c}h_c)} e^{-i2\omega t} + \right.$$



$$+ \sum_{\beta_c} \frac{a\mathcal{G}}{2\omega} \left[ P_{\beta_c}^{(2)} \cdot e^{\beta_c(x_A-x)} + Q_{\beta_c}^{(2)} \cdot e^{\beta_c(x-x_B)} \right] \frac{\cosh[\beta_c(h_c+z)]}{\cosh(\beta_c h_c)} e^{-i2\omega t} \quad [3.40]$$

con

$$(2\omega)^2 = gk_{2c} \tanh(k_{2c} h_c) \quad [3.41]$$

$$(2\omega)^2 = -g\beta_c \cdot \tanh(\beta_c h_c) \quad [3.42]$$

Guardando la [3.40] si nota come l'onda libera di pulsazione  $2\omega$  sia composta, tanto per la parte progressiva che per quella evanescente, da un moto retrogrado, derivante da una riflessione parziale [coefficienti  $Q^{(2)}$ ] che avviene in corrispondenza della sezione  $x = x_B$ , e da un'onda trasmessa [coefficienti  $P^{(2)}$ ] nella Regione II dalla Regione I. Infine, a completare il problema della propagazione in presenza della soglia sommersa, rimane da esplicitare la soluzione del moto a tergo dell'ostacolo (Regione III):

$$\Phi_{III}^{(2)} = \tilde{\Phi}_{III}^{(2)} + \Phi_{III}^{F(2)} \quad [3.43]$$

$$\tilde{\Phi}_{III}^{(2)} = \Phi_{III}^{P(2)} + \left[ \sum_{\alpha} \Phi_{III\alpha}^{(2)} + \sum_{\alpha,\alpha'} \Phi_{III\alpha\alpha'}^{(2)} + \sum_{\alpha,\alpha} \Phi_{I\alpha_c k_{1c}}^{(2)} \right] \quad [3.44]$$

di cui la componente legata progressiva:

$$\Phi_{III}^{P(2)} = \frac{3}{8} \omega a^2 \left| P_{k_1}^{(1)} \right|^2 \frac{\cosh[2k_1(h+z)]}{\sinh^4(2k_1 h)} \cdot \sin[2(k_1 x - \omega t)] \quad [3.45]$$

e la componente libera:

$$\begin{aligned} \Phi_I^{F(2)} = \text{Im} \left[ \frac{a\mathcal{G}}{2\omega} T_{k_2}^{(2)} \frac{\cosh[k_2(h+z)]}{\cosh(k_2 h)} \cdot e^{-ik_2(x_B-x)} e^{-i2\omega t} + \right. \\ \left. + \sum_{\beta} \frac{a\mathcal{G}}{2\omega} \cdot T_{\beta}^{(2)} \frac{\cosh[\beta(h+z)]}{\cosh(\beta h)} \cdot e^{\beta(x_B-x)} e^{-i2\omega t} \right] \quad [3.46] \end{aligned}$$

Nella [3.46]  $k_2$  e  $\beta$  seguono le relazioni di dispersione lineari date dalle [3.35] e [3.36]. I coefficienti di riflessione e trasmissione sono incognite ottenibili attraverso l'imposizione delle relazioni di congruenza sugli spigoli della barriera sommersa. Analogamente a quanto osservato per il primo ordine di approssimazione il numero di equazioni disponibili, tanto per la parte progressiva quanto per quella evanescente, per la ricerca dei suddetti coefficienti sono in numero necessario a rendere il problema univocamente determinato. Si omettono anche in questo caso lo sviluppo delle equazioni.

È importante sottolineare che al tendere di  $kh$  e  $k_c h_c$  all'infinito i coefficienti di trasmissione e riflessione non lineari tendono a zero. Ciò sta a significare che per

barriere profondamente sommerse le componenti armoniche di doppia frequenza, trasmesse a tergo della soglia, sono assolutamente trascurabili.

### 3.2.3 Il profilo dell'onda

L'analisi è completata fornendo l'espressione dello spostamento della superficie libera  $\eta$ :

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} \quad [3.47]$$

in cui

$$\eta^{(1)} = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \right)_{z=0} \quad [3.48]$$

$$\eta^{(2)} = \left( \eta_p^{(2)} + \eta_\alpha^{(2)} + \eta_{\alpha\alpha'}^{(2)} + \eta_{\alpha k_1}^{(2)} \right) + \eta^{F(2)} = \tilde{\eta}^{(2)} + \eta^{F(2)} \quad [3.49]$$

Con

$$\eta^{F(2)} = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi^{F(2)}}{\partial t} \right)_{z=0} \quad [3.50]$$

$\tilde{\eta}^{(2)}$  rappresenta lo spostamento della superficie libera che può essere ricavato dall'equazione [3.27c]. Soltanto il primo termine in parentesi della [3.49] rappresenta un'onda progressiva, i restanti termini rappresentano onde locali.

Lo spostamento della superficie libera delle *free waves*, generate dalla propagazione delle onde sul gradino, può essere facilmente ricavato differenziando l'equazione [3.50].

Dunque per la Regione I si ha:

$$\eta_I^{F(2)} = a \left| R_{k_2}^{(2)} \right| \cos(k_2 x - 2\omega t - \psi_I^{(2)}) + a \operatorname{Im} \left[ \sum_{\beta} R_{\beta}^{(2)} e^{\beta(x-x_A)} e^{i(-2\omega t + \pi/2)} \right] \quad [3.51]$$

in cui

$$\psi_I^{(2)} = k_2 x_A + \arg \left[ R_{k_2}^{(2)} \right] \quad [3.52]$$

Per la Regione II si ha:

$$\begin{aligned} \eta_I^{F(2)} = & a \left| P_{k_{2c}}^{(2)} \right| \cos(k_{2c} x - 2\omega t - \psi_{II}^{(2)}) + a \left| Q_{k_{2c}}^{(2)} \right| \cos(k_{2c} x + 2\omega t - \psi_{II}^{\prime\prime(2)}) + \\ & + a \operatorname{Im} \left\{ \left[ \sum_{\beta_c} P_{\beta_c}^{(2)} e^{\beta_c(x_A - x)} + \sum_{\beta_c} Q_{\beta_c}^{(2)} e^{\beta_c(x - x_B)} \right] e^{i(-2\omega t + \pi/2)} \right\} \end{aligned} \quad [3.53]$$

in cui

$$\psi'_{II}^{(2)} = k_{2c}x_A + \arctan\left[\varphi_{P_{\beta t}}\right] \quad [3.54]$$

$$\psi''_{II}^{(2)} = k_{2c}x_A + \arctan\left[\varphi_{Q_{\beta t}}\right] \quad [3.55]$$

Per la Regione III, infine, si ha:

$$\eta_I^{F(2)} = a \left| T_{k_2}^{(2)} \right| \cos\left(k_2x - 2\omega t - \psi_{III}^{(2)}\right) + a \operatorname{Im} \left[ \sum_{\beta} T_{\beta}^{(2)} e^{\beta(x_B - x)} e^{i(-2\omega t + \pi/2)} \right] \quad [3.56]$$

in cui

$$\psi_{III}^{(2)} = k_2x_B - \arg\left[T_{k_2}^{(2)}\right] \quad [3.57]$$

Dunque, nelle onde libere, possono essere ancora distinte le due componenti progressive e locali. Possiamo a questo punto, per semplicità, trascurare le componenti locali all'interno dell'equazione [3.49] in quanto esse svaniscono già ad una breve distanza dalle sezioni di discontinuità ( $x = x_A$  ed  $x = x_B$ ). Si può evincere, quindi, che nella Regione I sono presenti le seguenti *onde libere*:

- L'armonica fondamentale di ampiezza  $a$ ;
- L'armonica fondamentale riflessa di ampiezza  $a \left| R_{k_1}^{(1)} \right|$ ;
- L'armonica al secondo ordine libera di ampiezza  $a \left| R_{k_2}^{(2)} \right|$ ;

e le seguenti *onde forzate*:

- Le onde di Stokes correlate all'armonica fondamentale;
- Le onde di Stokes correlate all'armonica fondamentale riflessa.

Giacché le *free waves* di frequenza angolare  $2\omega$  si propagano con celerità minore rispetto alle *bound waves* [ $k_2 \geq 2k_1$ ], l'ampiezza complessiva della seconda armonica, risultante dall'interazione delle due, varia con la posizione  $x$  oscillando con periodicità tra un valore massimo ed un valore minimo. Tale fenomeno, conosciuto in meccanica ondulatoria come *beat*, è del tutto analogo a quello visto e spiegato nella teoria del battitore non lineare. Anche in questo caso, quindi, sarà possibile definire una lunghezza di ricorrenza di tale oscillazione spaziale (*beat length*). In particolare, la sovrapposizione dell'armonica libera al secondo ordine e delle onde di Stokes associate all'armonica fondamentale riflessa dal gradino, generano una variazione dell'ampiezza periodica pari a:

$$\lambda_-^{(2)} = \frac{2\pi}{k_2 - 0.5k_1} \quad [3.58]$$

Viceversa la sovrapposizione dell'armonica libera al secondo ordine e dell'armonica fondamentale incidente generano una variazione spaziale dell'ampiezza pari a:

$$\lambda_+^{(2)} = \frac{2\pi}{k_2 + 0.5k_1} \quad [3.59]$$

Nella Regione III le armoniche libere presenti sono due:

- L'armonica fondamentale trasmessa dalla Regione I con ampiezza  $a |T_{k_1}^{(1)}|$ ;
- L'armonica libera al secondo ordine con ampiezza  $a |T_{k_2}^{(2)}|$ .

Mentre l'onda forzata presente è soltanto una:

- Le onde di Stokes correlate all'armonica fondamentale incidente.

Nella teoria presentata, il potenziale  $\Phi^{F(2)}$  viene introdotto per soddisfare le condizioni di continuità del potenziale e della componente orizzontale della velocità nelle sezioni di discontinuità; fisicamente esso rappresenta le armoniche libere al secondo ordine che si propagano a monte e a valle del gradino.

Resta da sottolineare che la teoria esaminata è valida per numero di Stokes pari a:

$$S = \left(\frac{a}{h}\right) \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^2 \leq \frac{8}{3}\pi^2 \quad [3.60]$$

### 3.3 Soluzione di Goda et al. (1999)

La formulazione teorica data da Goda et al. (1999) sulla propagazione di un'onda al di sopra di un ostacolo sommerso è, da un punto di formale, simile a quella esposta nel paragrafo precedente. La soluzione è formulata in maniera completa soltanto per il caso di un ostacolo sommerso indefinito, fornendo, d'altra parte, un contributo del tutto innovativo al problema, includendo gli effetti del terzo ordine dovuti all'interazione tra l'armonica libera fondamentale e l'armonica libera del secondo ordine. Per il caso di ostacolo finito, gli Autori si limitano a risolvere il problema in forma chiusa soltanto al primo ordine di approssimazione mentre al secondo ordine suggeriscono, data la complessità formale della soluzione, un approccio semplificato che sfrutta i risultati del gradino indefinito.

Il punto di partenza della formulazione del problema è l'assunzione che nella zona off-shore l'ostacolo sommerso l'onda incidente sia un'onda di Stokes del terzo ordine la cui espressione è data dalla seguente:

$$\eta(x, t) = (a + a_{B1})\cos(k_1x - \omega t) + a_{B2}\cos[2(k_1x - \omega t)] + a_{B3}\cos[3(k_1x - \omega t)] \quad [3.61]$$

Nell'equazione [3.61] le componenti del secondo e terzo ordine sono legate alla fondamentale e viaggiano, quindi, con la sua stessa celerità dando luogo ad un profilo d'onda permanente. L'ampiezza di ogni armonica può essere calcolata dalle seguenti relazioni [Goda, 1998]:

$$\begin{cases} a_{B1} = \frac{1}{2}k_1^2 b_{11} a^3, & b_{11} = \frac{1}{8}(3c_1^4 + 8c_1^2 - 9) \\ a_{B2} = k_1 b_{22} a^2, & b_{22} = \frac{1}{4}(3c_1^3 - c_1) \\ a_{B3} = \frac{1}{2}k_1^2 b_{33} a^3, & b_{33} = \frac{3}{32}(9c_1^6 - 3c_1^4 + 3c_1^2 - 1) \end{cases} \quad [3.62]$$

Si osserva che  $g$  è l'accelerazione di gravità e  $k_1$  segue la relazione di dispersione lineare:

$$\omega^2 = gk_1 \tanh k_1 h \quad [3.63]$$

In Figura 3.2, ripresa dal lavoro di Goda, si riporta una rappresentazione schematica, per soglia di lunghezza infinita e finita, del campo d'onda e delle diverse armoniche di cui è composto.

Il sistema di coordinate è preso con origine dell'asse  $x$  in corrispondenza dello spigolo off-shore nel caso di gradino indefinito ed in mezzzeria della cresta nel caso di soglia di lunghezza finita (in questo caso la cresta ha larghezza pari a  $2l$ ).

Con un approccio analogo a quello seguito da Massel, il campo di moto è diviso in due (o tre) differenti zone delimitate dalla presenza della soglia. La zona off-shore [ $x < 0$  per soglia infinita e  $x < -l$  per soglia finita] è denominata dunque Regione I e la profondità viene indicata con  $h$ , quella al di sopra della soglia [ $x > 0$  oppure  $-l \leq x \leq l$ ] è denominata Regione II e la profondità la indicheremo con  $h_c$ . Per la barriera finita, la zona a tergo della stessa [ $x > l$ ] è definita Regione III.

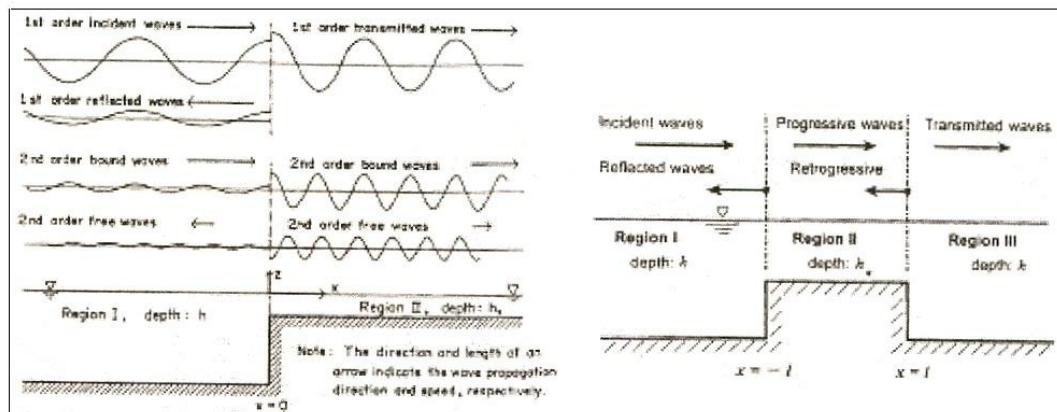


Figura 3.2. Rappresentazione schematica del dominio spaziale di integrazione e delle componenti armoniche per gradino di lunghezza infinita e lunghezza finita. [Goda et al., 1999]

Da qui a seguire si discuteranno le soluzioni per il caso di gradino indefinito, estendibili poi, con l'approccio indicato dagli Autori, al caso di soglia finita.

### 3.3.1 Soluzione al primo ordine

I potenziali di velocità, scritti in forma complessa, nelle Regioni I e II possono essere scritti come segue:

Regione I

$$\begin{aligned}\Phi_I^{(1)} = & i \frac{ag}{\omega} [e^{-ik_1x} + C_R e^{-ik_1x}] \cdot \frac{\cosh[k_1(h+z)]}{\cosh(k_1h)} \cdot e^{i\omega t} + \\ & + ia \sum_{n=1}^{\infty} S_n e^{v_n x} \frac{g \cos v_n(h+z)}{\omega \cos v_n h} \cdot e^{i\omega t}\end{aligned}\quad [3.64]$$

Regione II

$$\begin{aligned}\Phi_{II}^{(1)} = & i \frac{ag}{\omega} C_T e^{ik_{1c}x} \cdot \frac{\cosh[k_{1c}(h_c+z)]}{\cosh(k_{1c}h_c)} \cdot e^{i\omega t} + \\ & + ia \sum_{m=1}^{\infty} Q_m e^{v_m x} \frac{g \cos v_m(h_c+z)}{\omega \cos v_m h_c} \cdot e^{i\omega t}\end{aligned}\quad [3.65]$$

dove  $a$  rappresenta l'ampiezza dell'onda incidente al primo ordine;  $k_1$ ,  $k_{1c}$ ,  $v_n$  e  $v_m$  sono i numeri d'onda che soddisfano le seguenti relazioni di dispersione lineare:

$$\omega^2 = gk_1 \tanh k_1 h \quad [3.66a]$$

$$\omega^2 = gk_{1c} \tanh k_{1c} h_c \quad [3.66b]$$

$$\omega^2 = -gv_n \tanh v_n h \quad [3.66c]$$

$$\omega^2 = -gv_m \tanh v_m h_c \quad [3.66d]$$

$C_R$  e  $C_T$  rappresentano i coefficienti, in forma complessa, di riflessione e di trasmissione, il cui modulo è pari al rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa o trasmessa e l'ampiezza dell'onda incidente;  $S_n$  e  $Q_m$  rappresentano gli stessi coefficienti complessi delle onde evanescenti. Tali coefficienti sono delle incognite del problema e si ricavano imponendo le condizioni di continuità del potenziale di velocità e della componente di velocità orizzontale nella sezione di transizione dalla Regione I alla II. Tali condizioni forniscono un sistema di equazioni univocamente determinato:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_T = b_{t0}(1 + C_R) - \sum_{n=1}^{\infty} b_m S_n \\ C_R = 1 - b_{0t} C_T - i \sum_{m=1}^{\infty} b_{0m} Q_m \\ S_n = i b_{nt} C_T - \sum_{m=1}^{\infty} b_{mn} Q_m \\ Q_m = b_{m0}(1 - C_R) - \sum_{n=1}^{\infty} b_{nm} S_n \end{array} \right. \quad [3.67]$$

Per le espressioni dei coefficienti che compaiono nel sistema [3.67] si rimanda al lavoro di Goda et al. (1999).

### 3.3.2 Soluzione al secondo ordine

Il sistema al primo ordine, comprendente le onde evanescenti, soddisfa le condizioni di continuità nella sezione  $x = 0$ . Viceversa i potenziali, al secondo ordine, associati alle onde *bound* incidenti, riflesse e trasmesse vengono ricavati senza tener conto delle condizioni di continuità. Per poterle soddisfare è necessario, dunque, introdurre i potenziali di velocità al secondo ordine  $\Phi_I^{F(2)}$  nella Regione I e  $\Phi_{II}^{F(2)}$  nella Regione II.

Tali potenziali vengono forniti nella seguente forma:

$$\Phi_I^{F(2)} = a^2 \omega B_F \frac{\cosh[k_2(h+z)]}{\cosh(k_2 h)} \cdot \{e^{[i(k_2 x + 2\omega t)]} - e^{[-i(k_2 x + 2\omega t)]}\} \quad [3.68]$$

$$\Phi_{II}^{F(2)} = a^2 \omega B_{Fc} \frac{\cosh[k_{2c}(h_c+z)]}{\cosh(k_{2c} h_c)} \cdot \{e^{[-i(k_{2c} x - 2\omega t)]} - e^{[i(k_{2c} x - 2\omega t)]}\} \quad [3.69]$$

Si noti che  $k_2$  e  $k_{2c}$  soddisfano le relazioni di dispersione lineari seguenti:

$$(2\omega)^2 = g k_2 \tanh k_2 h \quad [3.70a]$$

$$(2\omega)^2 = g k_{2c} \tanh k_{2c} h_c \quad [3.70b]$$

I coefficienti complessi  $B_F$  e  $B_{Fc}$  dipendono dai coefficienti di trasmissione e riflessione del primo ordine  $[C_T, C_R]$  e dalle profondità relative  $k_2 h$  e  $k_{2c} h_c$ . Per le loro espressioni si rimanda al lavoro di Goda et al. (1999).

La superficie libera al secondo ordine, rispettivamente nella Regione I e II, può essere dunque ricavata dai rispettivi potenziali di velocità. La parte reale delle seguenti funzioni descrive, dunque, l'oscillazione del pelo libero per le onde libere di pulsazione  $2\omega$ :

$$\eta_I^{F(2)} = -i k_2 a^2 B_F \cos(k_2 x + 2\omega t) \quad [3.71]$$

$$\eta_{II}^{F(2)} = -ik_{2c}a^2B_{Fc}\cos(k_{2c}x - 2\omega t) \quad [3.72]$$

Le espressioni del potenziale di velocità e del profilo libero delle *bound waves*, associate all'onda fondamentale incidente, trasmessa e riflessa, non sono riportate in maniera esplicita poiché, dall'equazione [3.61], una volta calcolati i coefficienti  $C_R$  e  $C_T$  con l'ausilio delle [3.67], è possibile risalire alla funzione dell'oscillazione delle componenti legate sostituendo, per l'onda trasmessa e riflessa, le ampiezze  $a|C_T|$  e  $a|C_R|$ .

### 3.3.3 Estensione della soluzione del moto al III ordine

Come accennato in precedenza, l'aspetto più originale della soluzione proposta da Goda et al. è la valutazione dell'interferenza tra armoniche libere del primo e del secondo ordine. L'interazione di queste componenti dà origine ad ulteriori due componenti del terzo ordine. Il fenomeno si riconduce all'interazione tra triplette (*triad interaction*) ed era stato affrontato da Goda anche nel lavoro del 1998 descritto nel corso del Capitolo 2.

L'interferenza tra le due armoniche libere genera due ulteriori onde di frequenza pari, rispettivamente, alla differenza ed alla somma delle due frequenze delle anzidette armoniche libere.

Gli Autori evidenziano come, al largo dell'ostacolo, data la piccola entità delle free waves di doppia frequenza, le onde di interferenza siano normalmente piccole. Al contrario, al di sopra della soglia, le onde libere di pulsazione  $2\omega$  sono non trascurabili e, spesso, di ampiezza comparabile a quella dell'onda fondamentale; dunque, nella Regione II, l'interazione tra triplette genera un'onda il cui profilo è espresso da:

$$\eta_{II}^{T(3)} = C_T k_{2c}^2 a^3 B_{T1} \cos[(k_{2c} - k_{1c})x - \omega t] + C_T k_{2c}^2 a^3 B_{T3} \cos[(k_{2c} + k_{1c})x - 3\omega t] \quad [3.73]$$

In cui  $C_T$  esprime il coefficiente di trasmissione al primo ordine tra le Regioni I e II, mentre  $B_{T1}$  e  $B_{T3}$  dipendono dai coefficienti di trasmissione al secondo ordine e dai valori dei numeri d'onda al largo e al di sopra dell'ostacolo.

Nel caso di barriera di dimensioni finite, a causa della complessità formale della soluzione esatta, gli Autori ricorrono ad una soluzione approssimata mediante un approccio alternativo. Sostanzialmente, gli Autori, per il contorno tra la Regione I e II, sfruttano la soluzione di soglia di lunghezza infinita e quindi le onde free, bound e di interferenza si ricavano attraverso i risultati fin qui esposti; al di là della soglia, invece, viene sviluppata una teoria analoga a quella relativa alla regione off-shore della soglia sommersa.

### 3.4 Considerazioni conclusive sulle soluzioni teoriche

Le soluzioni teoriche trattate in questo capitolo hanno evidenziato in maniera univoca come in presenza di una barriera sommersa, in questo caso rettangolare ed impermeabile, che rappresenta una brusca variazione di profondità del fondale, il moto ondoso presenta caratteristiche fortemente non lineari.



In presenza dell'ostacolo sommerso il moto ondoso viene in parte riflesso ed in parte trasmesso a tergo dell'ostacolo. In questo processo l'onda fondamentale incidente di pulsazione  $\omega$  viene scomposta in diverse armoniche di pulsazione doppia rispetto alla principale. In tale processo di scomposizione, una parte delle super-armoniche sarà legata alla fondamentale (*bound waves*) mentre l'altra parte si propagherà con oscillazioni libere di frequenza  $2\omega$  e celerità indipendente rispetto alla componente fondamentale (*free waves*).

Nella zona off-shore dell'ostacolo, il moto ondoso risulta dalla sovrapposizione dell'onda incidente e dell'onda riflessa. Entrambe le onde presentano componenti di primo ordine e, a seconda della profondità relativa, componenti legate di secondo ordine. L'onda riflessa presenterà una componente libera del secondo ordine.

Al di sopra della cresta della barriera il moto ondoso risulterà dalla sovrapposizione di onde trasmesse e riflesse, entrambe con componenti armoniche di primo ordine e di ordine superiore; queste ultime saranno sia di tipo *bound* che di tipo *free*.

A tergo della barriera, sarà presente un moto ondoso trasmesso con armoniche di ordine superiore di tipo *free* e di tipo *bound*, queste ultime più o meno grandi a seconda della profondità relativa.

Come evidenziato da Goda et al. (1999) le componenti libere di primo e secondo ordine subiscono una interazione non lineare che dà luogo ad onde di interferenza del terzo ordine secondo il meccanismo noto come *triad interaction*.

Infine, così come osservato più volte nel corso di questi ultimi due capitoli, si ricorda che le onde libere del secondo ordine viaggiano con celerità più bassa rispetto all'onda di Stokes del II ordine; tale fatto produce una variazione del profilo d'onda nello spazio dando luogo ad un campo di moto non permanente. D'altra parte l'interazione tra *bound waves* e *free waves* genera un'oscillazione spaziale dell'armonica totale di pulsazione  $2\omega$ .

### 3.5 Studio sperimentale di Grue (1992).

J. Grue nel 1992 ha investigato le caratteristiche del moto ondoso a tergo di un ostacolo sommerso mediante studi di natura teorica e sperimentale, in presenza di attacchi ondosi regolari. L'Autore propose un metodo di separazione delle componenti armoniche che costituiscono il campo di moto ondoso trasmesso provando a descriverne dettagliatamente la generazione.

Le indagini sperimentali furono condotte presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Oslo utilizzando un canale ad onde che misura  $14.2m$  di lunghezza e  $0.47m$  di larghezza. Il livello idrico in canale era variabile tra  $0.44$  e  $0.46m$ . Il canale era attrezzato con un generatore d'onda a pistone. All'estremità opposta della pala meccanica era disposta una spiaggia assorbente in grado di garantire un coefficiente di riflessione inferiore al 10%.

Le prove sono state eseguite con onde regolari di ampiezza variabile tra  $0.2cm$  e  $2.8cm$  e tre diversi valori della frequenza, pari a  $0.95Hz$ ,  $1.05Hz$  e  $1.22Hz$ , a cui corrispondono,

rispettivamente, periodi di 1.05s, 0.952s e 0.820s. Per ogni test l'elevazione d'onda era registrata a mezzo di sonde di livello in 4 differenti posizioni lungo il canale.

L'ondogeno a pistone operava in condizioni tali da evitare la generazione di onde spurie di ordine superiore.

Durante le prove furono analizzati gli effetti dell'interazione tra moto ondosso e tre tipologie di ostacoli sommersi. Il primo era costituito da un cilindro di raggio  $R=10\text{cm}$ , il secondo da un cilindro di dimensioni superiori al primo ( $R=19\text{cm}$ ) ed il terzo da una barriera rettangolare larga  $50\text{cm}$  ed altezza variabile rispetto al fondo del canale. Tutte le tipologie di ostacolo erano perfettamente impermeabili.

La Figura 3.3 mostra uno schema riassuntivo delle configurazioni sperimentali indagate dall'Autore.

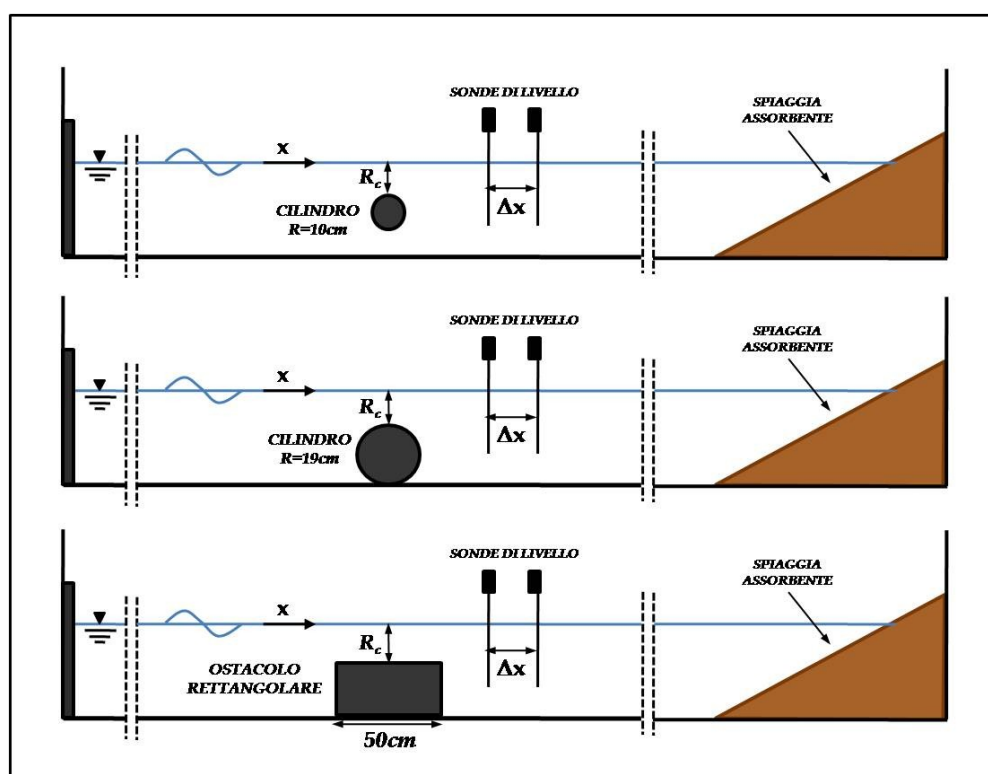


Figura 3.3. Schema dell'apparato sperimentale adoperato da J. Grue (1992).

I risultati sperimentali furono poi confrontati con quelli di un modello matematico semplificato, proposto dall'Autore, che utilizza la formulazione di Boussinesq per la definizione della portata che supera l'ostacolo sommerso; tale portata rappresenta la condizione al contorno per definire le caratteristiche ondose a tergo dell'ostacolo. Per brevità tali aspetti non saranno discussi nella presente trattazione.

Assumendo un sistema di riferimento con asse  $x$  orientato secondo la direzione di propagazione dell'onda, il profilo libero dell'onda incidente (profilo libero in assenza di ostacolo) può essere descritto dalla funzione:

$$\eta(x, t) = a \cdot \cos(k_1 x - \omega t + \delta) + a_B^{(2)} \cdot \cos[2(k_1 x - \omega t + \delta)] + \dots \quad [3.73]$$

in cui  $a$  ed  $a_B^{(2)}$  rappresentano, rispettivamente, le ampiezze dell'armonica principale e della seconda armonica, nell'ipotesi che il moto ondoso incidente sia descritto dalla teoria di Stokes; il pedice "B" indica che tale armonica è legata a quella fondamentale (*bound wave*) e  $\delta$  indica la costante di fase iniziale dell'onda incidente. Il numero d'onda  $k_1$  soddisfa la relazione di dispersione lineare riferita alla frequenza angolare  $\omega$  dell'armonica fondamentale.

È importante sottolineare che, nel caso in esame, per effetto del valore elevato della profondità [ $\tanh(k_1 h) \cong 1$ ] l'ampiezza  $a_B^{(2)}$ , prevedibile dalla teoria di Stokes del II ordine, assume il seguente valore:

$$a_B^{(2)} \cong \frac{1}{2} a^2 k_1 \quad [3.74]$$

Ad ogni modo, la quantità espressa dalla [3.74] è molto modesta, praticamente trascurabile rispetto all'ampiezza dell'armonica principale.

Nell'area a tergo dell'ostacolo (*lee side*), si assume che il profilo d'onda trasmesso sia esprimibile mediante la funzione:

$$\begin{aligned} \eta_T(x, t) = & a_{FT}^{(1)} \cdot \cos(k_1 x - \omega t + \delta^{(1)}) + \sum_{n>1} a_{BT}^{(n)} \cdot \cos[n(k_1 x - \omega t + \delta^{(1)})] \\ & + \sum_{n>1} a_{FT}^{(n)} \cdot \cos[(k_n x - n\omega t + \delta^{(n)})] \end{aligned} \quad [3.75]$$

in cui  $a_{FT}^{(1)}$  e  $\delta^{(1)}$  rappresentano, rispettivamente, l'ampiezza e la costante di fase iniziale dell'onda trasmessa di pulsazione  $\omega$ ,  $a_{BT}^{(n)}$  l'ampiezza della componente ondosa trasmessa di ordine  $n$  legata alla fondamentale ed, infine,  $a_{FT}^{(n)}$  e  $\delta^{(n)}$  l'ampiezza e la costante di fase della super-armonica libera trasmessa di ordine  $n$ .

Si noti che nell'equazione [3.75] sono state omesse le componenti armoniche riflesse dalla spiaggia assorbente. In effetti, come già accennato in precedenza, l'Autore misurò durante gli esperimenti coefficienti di riflessione della componente fondamentale molto modesti (inferiori al 10%) ed, inoltre, la riflessione indotta dalle super armoniche può essere considerata ancor più modesta essendo queste onde più corte. L'Autore considera lecito, dunque, assumere trascurabili tali effetti.

Nell'equazione [3.75] il numero d'onda  $k_n$  soddisfa le seguente relazione di dispersione lineare:

$$(n\omega)^2 = g k_n \cdot \tanh(k_n h) \quad [3.76]$$

L'Autore, all'interno del lavoro pubblicato sul *Journal of Fluid Mechanics* nel 1992 e qui discusso, propone una tecnica non lineare di separazione delle componenti armoniche costituenti il campo d'onda trasmesso. Attraverso l'applicazione del metodo, discusso più in dettaglio in Appendice A, le ampiezze delle armoniche che compaiono nella [3.75] possono essere calcolate a partire dalla misura contemporanea del livello idrico in almeno due posizioni, a distanza reciproca nota.

Si indichino con  $x_1$  ed  $x_1 + \Delta x$  le ascisse corrispondenti a due posizioni di misura all'interno del canale nella zona protetta dalla struttura. Sia, inoltre,  $\hat{\eta}_T^{(n)}(x)$  la trasformata di Fourier della funzione  $\eta_T(x, t)$ :

$$\hat{\eta}_T^{(n)}(x) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \eta(x, t) \cdot e^{-in\omega t} dt \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad [3.77]$$

Attraverso la manipolazione analitica dell'equazione [3.75], di cui non si mostrano qui i passaggi per brevità, e trascurando le soluzioni relative alle costanti di fase, si giunge alle espressioni che permettono il calcolo delle ampiezze delle singole componenti del campo d'onda trasmesso.

L'ampiezza dell'armonica corrispondente alla frequenza fondamentale si esprime attraverso la seguente formula:

$$a_{FT}^{(1)} = \frac{1}{|\text{sen}(k_1 \Delta x)|} \cdot \left| \hat{\eta}_T^{(1)}(x_1) - \hat{\eta}_T^{(1)}(x_1 + \Delta x) \cdot e^{ik_1 \Delta x} \right| \quad [3.78]$$

Le ampiezze delle armoniche di ordine  $n$  sono, invece, espresse dalle seguenti:

$$a_{BT}^{(n)} = \frac{1}{\left| \text{sen} \left[ \frac{1}{2} (k_n - nk_1) \Delta x \right] \right|} \cdot \left| \hat{\eta}_T^{(n)}(x_1) - \hat{\eta}_T^{(n)}(x_1 + \Delta x) \cdot e^{ik_n \Delta x} \right| \quad [3.79]$$

$$a_{FT}^{(n)} = \frac{1}{\left| \text{sen} \left[ \frac{1}{2} (k_n - nk_1) \Delta x \right] \right|} \cdot \left| \hat{\eta}_T^{(n)}(x_1) - \hat{\eta}_T^{(n)}(x_1 + \Delta x) \cdot e^{ink_1 \Delta x} \right| \quad [3.80]$$

Durante i test le registrazioni dell'elevazione d'onda sono state ripetute per diversi valori di  $x_1$ , corrispondenti ad una distanza dall'ostacolo variabile tra  $0.8m$  e  $1.5m$ , e variando la distanza relativa tra le due stazioni di misura  $\Delta x$  tra  $0.10m$  e  $0.30m$ . Ad ogni modo, i risultati, per tutti i test eseguiti, hanno mostrato valori delle ampiezze sostanzialmente indipendenti da  $x_1$  e  $\Delta x$ .

Di seguito si discutono i principali risultati sperimentali del lavoro di Grue.

In Figura 3.4 sono riportati i risultati delle prove eseguite in presenza del cilindro di raggio  $R=10cm$  con sommergenza  $R_c=10cm$ . Nei grafici sono riportati gli andamenti delle componenti libere trasmesse di ordine  $i$ -esimo, rapportate ad  $a$ , in funzione dell'ampiezza fondamentale incidente.

Si nota come il rapporto  $a_{FT}^{(1)}/a$  si mantenga pressoché costante e pari all'unità in tutto il campo delle ampiezze incidenti. Ciò avviene sia per le onde di periodo  $T=0.952s$  (Figura 3.4a) sia per quelle di periodo  $T=0.820s$  (Figura 3.4b).

L'ampiezza delle *free waves* di pulsazione  $2\omega$  (rapportata all'ampiezza dell'onda incidente) mostra un andamento crescente, mantenendo, in ogni caso, valori molto inferiori alla componente del primo ordine.

È importante sottolineare che durante i test, i cui risultati sono stati documentati dai precedenti grafici, non si è mai verificato frangimento sull'ostacolo.

Le ampiezze delle onde legate, molto più piccole rispetto a quelle libere, sono in accordo con i valori teorici espressi dalla [3.74].

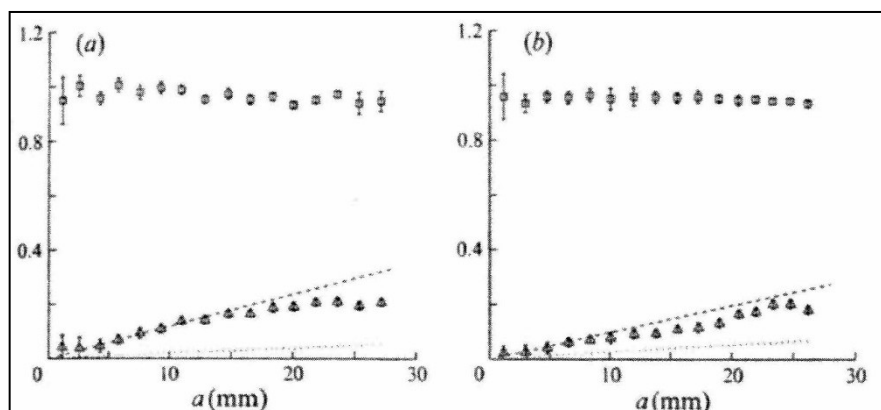


Figura 3.4. Andamento dei rapporti  $a_{FT}^{(1)}/a$  [□] ed  $a_{FT}^{(2)}/a$  [Δ] in funzione dell'ampiezza incidente per cilindro di raggio  $R=10cm$  con sommergenza  $R_c=10cm$ ;  $T=0.952s$  (a) e  $T=0.8202$  (b).

La Figura 3.5 mostra, invece, i risultati sperimentali ottenuti con il tirante più basso ( $R_c=5cm$ ). Le Figure 3.5a e 3.5b si riferiscono al cilindro di raggio  $R=10cm$ , mentre la Figura 3.5c al cilindro di raggio  $R=19cm$ .

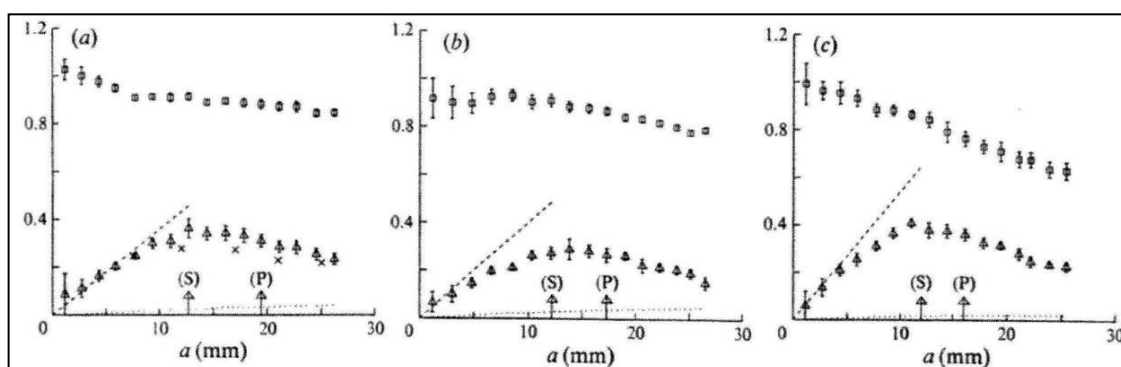


Figura 3.5. Andamento dei rapporti  $a_{FT}^{(1)}/a$  [□] ed  $a_{FT}^{(2)}/a$  [Δ] in funzione dell'ampiezza incidente; cilindro di raggio  $R=10cm$  con  $T=0.952s$  (a) e  $T=0.820s$  (b), cilindro di raggio  $R=19cm$  e  $T=0.952s$  (c); sommergenza  $R_c=5cm$ .

Si nota come, in tutti i casi, la componente del I ordine dell'onda trasmessa (rapportata ad  $a$ ) presenti un andamento decrescente al crescere dell'altezza d'onda incidente; tale andamento è molto marcato per il cilindro di dimensioni maggiori. Alla riduzione della componente fondamentale corrisponde, invece, un incremento delle super-armoniche libere del II ordine, le quali attingono il valore massimo (circa  $0.4a$  in tutti e tre i grafici proposti) in corrispondenza della prima comparsa del frangimento *Spilling* (S) sull'ostacolo. Una volta avvenuto il frangimento l'ampiezza delle *free waves* del II ordine decresce, in maniera monotona, con l'ampiezza dell'onda incidente.

L'ampiezza  $a_{BT}^{(2)}$ , così come tutte le componenti di ordine superiore al II, sono da considerarsi trascurabili.

I grafici di Figura 3.6 si riferiscono al cilindro di dimensioni inferiori con il livello di sommergenza più basso ( $R_c=2.5cm$ ). I risultati sono simili a quelli discussi in

precedenza salvo che il valore massimo della componente libera trasmessa del II ordine si verifica per un'ampiezza d'onda incidente più bassa rispetto al caso  $R_c=5cm$ , ma risultando comunque dello stesso ordine ( $a_{FT}^{(2)} \cong 0.4a$ ).

L'ampiezza  $a_{BT}^{(2)}$  risulta ancora trascurabile, insieme alle componenti di ordine superiore.

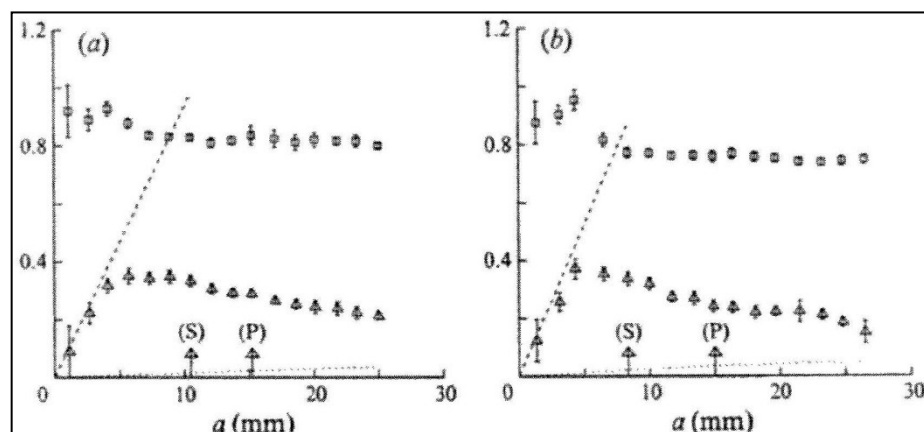


Figura 3.6. Andamento dei rapporti  $a_{FT}^{(1)}/a$  [ $\square$ ] ed  $a_{FT}^{(2)}/a$  [ $\Delta$ ] in funzione dell'ampiezza incidente; cilindro di raggio  $R=10cm$  con  $T=0.952s$  (a) e  $T=0.820s$  (b); sommergenza  $R_c=2.5cm$ .

I grafici di Figura 3.7 mostrano i risultati dei test eseguiti in presenza della barriera rettangolare con i due livelli di sommergenza, facendo variare di poco il periodo dell'armonica fondamentale. Da entrambi i grafici si nota chiaramente come, in presenza della barriera rettangolare, la generazione delle super-armoniche sia molto più importante rispetto ai casi discussi in precedenza tanto che, per il livello di sommergenza più basso ( $R_c=3.75cm$ , Figura 3.7a), l'ampiezza della super-armonica libera del III ordine diviene non trascurabile attingendo valori confrontabili con quelle di I e II ordine. In particolare, in corrispondenza delle prime condizioni di frangimento *spilling*, tutte le componenti libere raggiungono valori molto prossimi tra loro e circa pari al 60% dell'ampiezza d'onda incidente. Anche qui, mentre l'ampiezza della dominante decresce in tutto il campo delle ampiezze incidenti, le ampiezze delle componenti libere crescono fino ad un massimo raggiunto in corrispondenza del limite di frangimento, per poi decrescere al di là di esso.

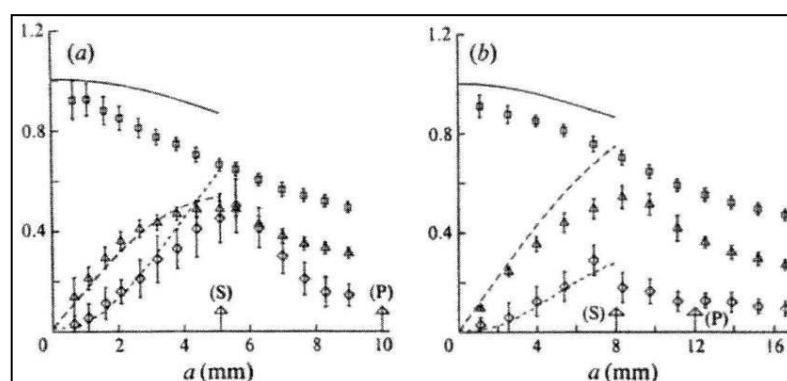


Figura 3.7. Andamento dei rapporti  $a_{FT}^{(1)}/a$  [ $\square$ ],  $a_{FT}^{(2)}/a$  [ $\Delta$ ] ed  $a_{FT}^{(3)}/a$  [ $\diamond$ ] per ostacolo rettangolare;  $R_c=3.75cm$  e  $T=1.05s$  (a) ed  $R_c=5cm$  e  $T=0.952s$  (b);

I tutte le prove sperimentali eseguite dall'Autore, la generazione delle super-armoniche aumenta di intensità al cresce dell'altezza d'onda incidente fino al raggiungimento delle condizioni di rottura dell'onda. Una volta avvenuto il frangimento il trasferimento di energia alle armoniche di alta frequenza si riduce, suggerendo un fenomeno di saturazione delle ampiezze di tali armoniche.

### 3.6 Studio sperimentale di Losada et al. per ostacolo rettangolare sommerso di porosità variabile

Gli studi sperimentali di Losada et al. (1997) hanno investigato l'effetto della permeabilità della struttura sommersa sul processo di generazione delle super-armoniche e sul meccanismo di riflessione e trasmissione del moto ondoso. Gli Autori hanno esaminato tre diversi tipi di barriere rettangolari con la medesima geometria, ma con permeabilità diverse, nel caso di moto ondoso incidente regolare, ed in assenza di frangimento.

Le indagini sperimentali furono eseguite presso l'Università della Cantabria (Spagna) adoperando un canale ad onde lungo 69m, largo 2m ed alto 2m. Ad una delle estremità del canale era disposta una spiaggia assorbente con pendenza 1:20.

La Figura 3.8 mostra uno schema dell'installazione sperimentale adoperata dagli Autori.

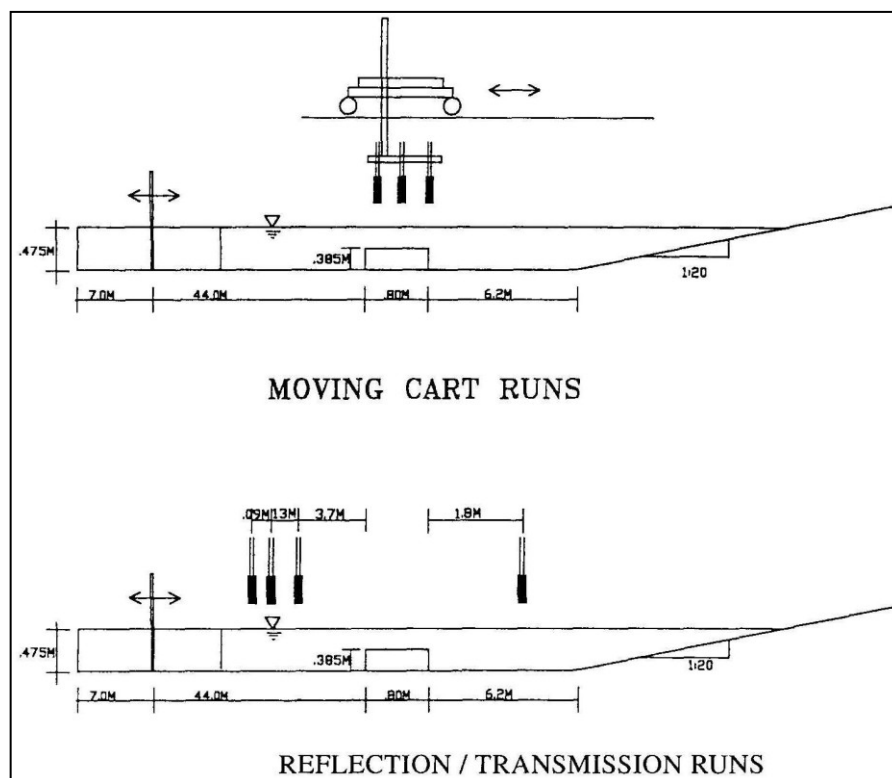


Figura 3.8. Schema dell'installazione sperimentale utilizzata da Losada et al. (1997)

Le misure vennero effettuate utilizzando sette sonde resistive, di cui quattro collocate in posizioni fisse (tre nella zona lato mare della barriera ed una nella zona protetta) per

la misura delle caratteristiche dell'onda riflessa e trasmessa, e tre montate su di un carrello mobile. L'ostacolo rettangolare presentava larghezza  $0.80m$  ed altezza  $0.385m$ , mentre la profondità del canale  $h$  era pari a  $0.475m$ ; la profondità al di sopra dell'ostacolo, pertanto era pari a  $9.0cm$ .

Le prove vennero eseguite in presenza di tre differenti tipi di strutture di forma rettangolare; la prima, impermeabile, era realizzata in legno ed ancorata al fondo del canale, la seconda di piccola permeabilità (*fine permeable*), costruita mediante una rete metallica all'interno della quale era disposta della ghiaia di diametro  $D_{50}=2.09cm$  e porosità  $0.521$ , la terza, di maggiore permeabilità (*coarse permeable*), per la quale la rete metallica era riempita con cubetti di calcestruzzo di lato  $3.0cm$ , con porosità  $0.62$ . Le tre tipologie di barriera avevano identiche dimensioni geometriche ovvero larghezza del coronamento pari ad  $80cm$  ed altezza  $38.5cm$ .

I test furono eseguiti in due sessioni differenti. La prima era finalizzata all'analisi della riflessione e trasmissione e le onde incidenti avevano periodi compresi tra  $0.8s$  e  $2.7s$  ed altezze comprese tra  $2.53cm$  e  $3.32cm$ . La seconda sessione venne eseguita, invece, per analizzare il processo di generazione delle super-armoniche indotte dall'interazione onda-barriera. In questa sessione di prove le simulazioni ebbero luogo con onde incidenti di periodo variabile tra  $1.2s$  e  $1.8s$  e con altezze comprese tra  $1.96cm$  e  $4.29cm$ ; il processo di oscillazione della superficie libera era registrato mediante le sonde montate su carrello mobile.

La Figura 3.9 mostra i coefficienti di riflessione ( $R$ ) e di trasmissione ( $T$ ) in funzione della profondità relativa  $kh$ .

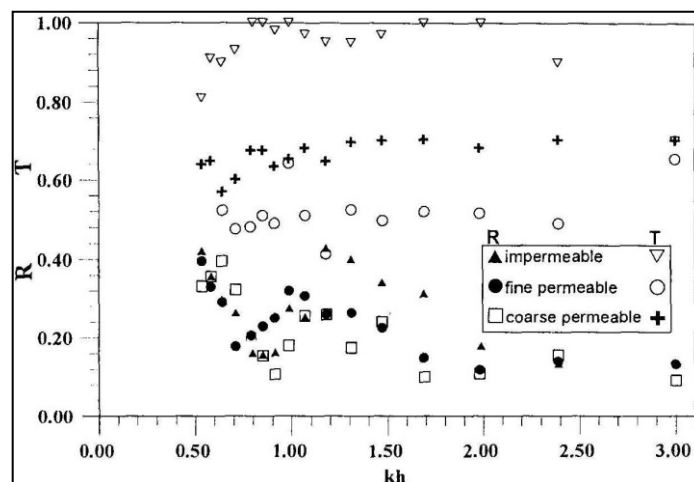


Figura 3.9. Coefficienti di riflessione ( $R$ ) e di trasmissione ( $T$ ) misurati da Losada et al. (1997)

I coefficienti di riflessione vennero stimati attraverso l'applicazione dei metodi di Mansard and Funke (1980) e Goda and Suzuki (1976) ad i segnali d'onda registrati dalle tre sonde posizionate nella zona lato mare della barriera.

Dalla figura si osserva che il coefficiente di riflessione assume i valori massimi per la struttura impermeabile, e decresce, seppur lievemente, al crescere della porosità. Per quanto riguarda la trasmissione, i valori maggiori corrispondono al caso della struttura impermeabile; in presenza di strutture permeabili i coefficienti di trasmissione sono



più elevati per la struttura di maggiore porosità. I risultati sembrano essere poco influenzati dalla profondità relativa.

Attraverso le sonde di livello montate sul carrello gli Autori effettuarono acquisizioni multiple del profilo ondoso al fine di valutare la generazione di super-armoniche indotte dal passaggio dell'onda sulla struttura. Per ognuna di queste posizioni, distribuite a largo, sopra ed a tergo della barriera, il processo di elevazione ondosa venne valutato sia nel dominio del tempo che in quello delle frequenze.

La Figura 3.10 riporta i profili ondosi e gli spettri di energia in alcune delle posizioni di misura all'interno del canale, per un test in cui l'altezza d'onda era di  $4.29\text{cm}$  ed il periodo di  $1.8\text{s}$ . In figura ogni posizione è individuata da un valore dell'ascissa  $x$  avendo fissato un sistema di riferimento orizzontale con origine in corrispondenza dello spigolo off-shore della barriera ed asse diretto positivamente nella direzione di propagazione dell'onda. Nella Figura 3.11 sono mostrati i risultati delle stesse misure effettuate in presenza della struttura permeabile di maggiore porosità.

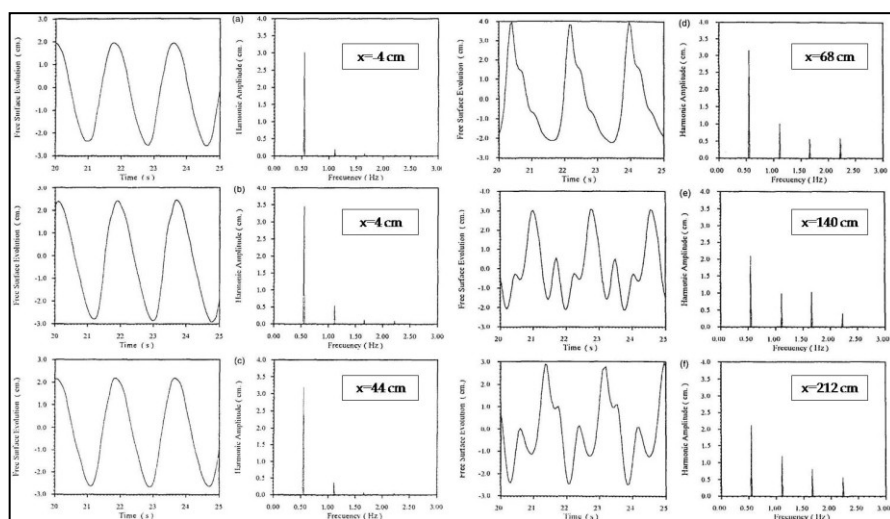


Figura 3.10. Profili ondosi e spettri di energia misurati a largo, al di sopra ed a tergo dell'ostacolo, per struttura impermeabile;  $T=1.8\text{s}$ ,  $H=4.29\text{s}$ .

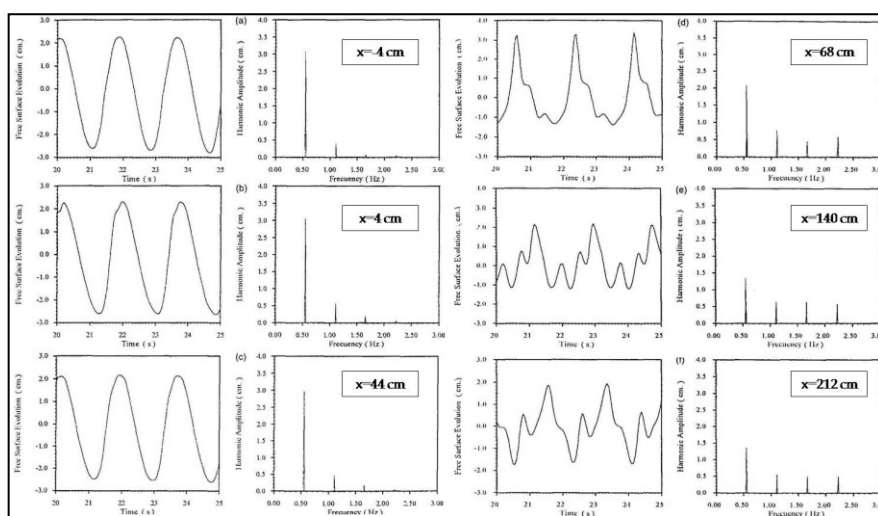


Figura 3.11. Profili ondosi e spettri di energia misurati a largo, al di sopra ed a tergo dell'ostacolo, per struttura permeabile di maggiore porosità;  $T=1.8\text{s}$ ,  $H=4.29\text{s}$ .

Le misure risultano in accordo con quanto discusso nel corso dei paragrafi precedenti. Il moto ondoso è debolmente non lineare a largo dell'ostacolo, mentre presenta delle evidenti non linearità al di sopra di esso, con componenti armoniche di ordine superiore che si evidenziano sia dal profilo ondoso, sia dallo spettro di energia. A tergo dell'ostacolo, si osserva la decomposizione del moto ondoso in varie onde di differente frequenza.

Nel caso di ostacolo permeabile si riscontra una continua riduzione di energia portata dalla frequenza principale al di sopra della barriera, al contrario di quanto avviene per la struttura impermeabile. L'evoluzione del profilo al di sopra dell'ostacolo è molto simile al caso di struttura impermeabile, anche se il moto ondoso, nel complesso, è caratterizzato da un minore contenuto energetico delle super-armoniche. Tali fenomeni sono la conseguenza della dissipazione di energia dovuta alla porosità della barriera.

Le considerazioni svolte sono evidenziate in maggior dettaglio nelle Figure 3.12 e 3.13, nelle quali sono riportati gli andamenti nello spazio delle ampiezze di Fourier delle armoniche di differente frequenza, rispettivamente, nel caso di ostacolo impermeabile e permeabile con porosità maggiore.

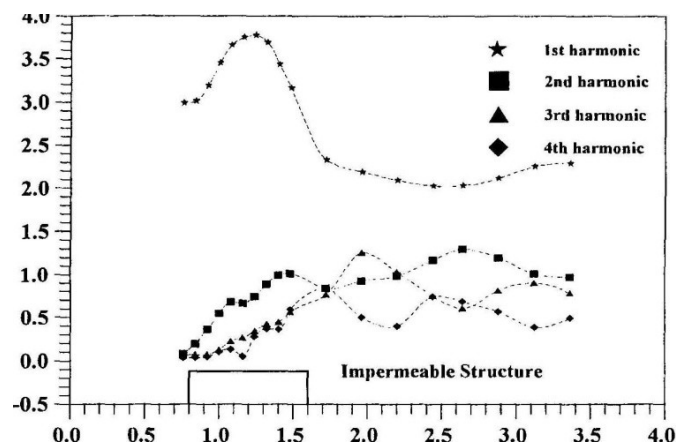


Figura 3.12. Variazione spaziale delle ampiezze di Fourier; struttura impermeabile.

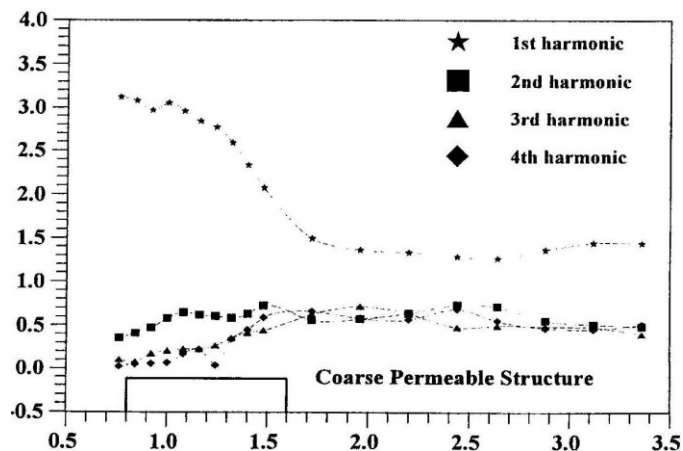


Figura 3.13. Variazione spaziale delle ampiezze di Fourier; struttura di elevata porosità.

Dalle figure si nota come la permeabilità induca una generale riduzione delle ampiezze delle armoniche; tuttavia, tale effetto sembra avere un'influenza maggiore sulla prima

e sulla seconda armonica rispetto alla terza ed alla quarta, il cui contenuto energetico supera, in qualche caso, quello della seconda armonica e diventa confrontabile con la componente dominante.

Un aspetto interessante del lavoro di Losada et al. (1997) riguarda la determinazione del fondale effettivo,  $h_{ef}$ , che l'onda sarebbe in grado di "sentire" propagandosi sopra una struttura sommersa porosa, concetto comunque direttamente collegato al processo di generazione di super-armoniche. Di fatto gli Autori evidenziarono come l'altezza d'onda relativa  $H/h$  e la profondità relativa  $kh$  fossero due parametri che influenzano la potenziale generazione di super-armoniche durante il processo di trasmissione. In particolare essi notarono che, in generale, sia una diminuzione del primo sia un aumento del secondo tende a limitare il fenomeno.

È evidente che l'onda, nel passaggio sopra una barriera, vede ridursi la propria lunghezza d'onda a causa di un ridotto fondale in corrispondenza del coronamento. Nel caso di barriera porosa la variazione del numero d'onda sarà influenzata anche dalla porosità stessa. D'altra parte, in tal caso, il numero d'onda  $k$  è esprimibile mediante un numero complesso la cui parte immaginaria controlla il processo di dissipazione (Losada et al., 1991):

$$K = k_r - ik_i \quad [3.81]$$

Ora, si immagini che una barriera sommersa permeabile di altezza  $a$  sia posizionata su un fondale pari ad  $h$ . Gli Autori proposero un metodo iterativo per giungere alla valutazione del fondale effettivo  $h_{ef}$ .

In primo luogo si calcola il valore del numero d'onda complesso  $K$  tramite la seguente relazione di dispersione proposta da Losada et al. (1996):

$$\omega^2 - gK \cdot \tanh(Kh) = F[\omega^2 \tanh(Kh) - gk] \quad [3.82]$$

con:

$$F = \left[ 1 - \frac{n}{(s - if)} \right] \frac{\tanh(Ka)}{1 - \frac{n}{(s - if)} \tanh^2(Ka)} \quad [3.83]$$

in cui  $n$  è la porosità del materiale di cui è costituita la barriera sommersa ed  $f$  è un coefficiente di attrito linearizzato che tiene conto delle dissipazioni dovute alla permeabilità e al flusso turbolento attraverso il corpo della barriera;  $s$  è un coefficiente inerziale considerato pari all'unità.

Successivamente la procedura prevede il calcolo del numero d'onda,  $k$ , per una struttura impermeabile. Per il calcolo di tale valore si impone un fondale di primo tentativo  $h_{ef} = h - a$  e si utilizza la consueta legge di dispersione lineare:

$$\omega^2 = gk \cdot \tanh(k h_{ef}) \quad [3.84]$$

A questo punto, se la parte reale  $k_r$  del numero d'onda complesso  $K$  calcolato tramite la [3.82] è uguale a  $k$ , allora il procedimento iterativo giunge al termine; in caso

contrario si incrementa il fondale  $h_{ef}$  di una quantità  $\Delta h$ , con  $\Delta h < a$ , e si ripete l'iterazione fino a quando le due precedenti quantità si eguagliano.

La Figura 3.14, presa direttamente dal lavoro di Losada et al. (1997), mostra l'andamento del fondale effettivo  $h_{ef}$  in funzione del fattore di attrito  $f$ , per diversi valori della porosità  $n$  e per un caso specifico di barriera di altezza  $a = 6m$  disposta su un fondale  $h = 10m$ . Si nota che per una struttura estremamente porosa, vale a dire per valori limite di  $n = 1$  ed  $f = 0$ , il fondale effettivo è pari a  $10m$ . Al contrario, per alti valori di  $f$  e per strutture con porosità prossima allo zero, il gradino si comporta in sostanza come una struttura impermeabile e, dunque, l'onda "sentirà" un fondale effettivo pari a  $6m$ .

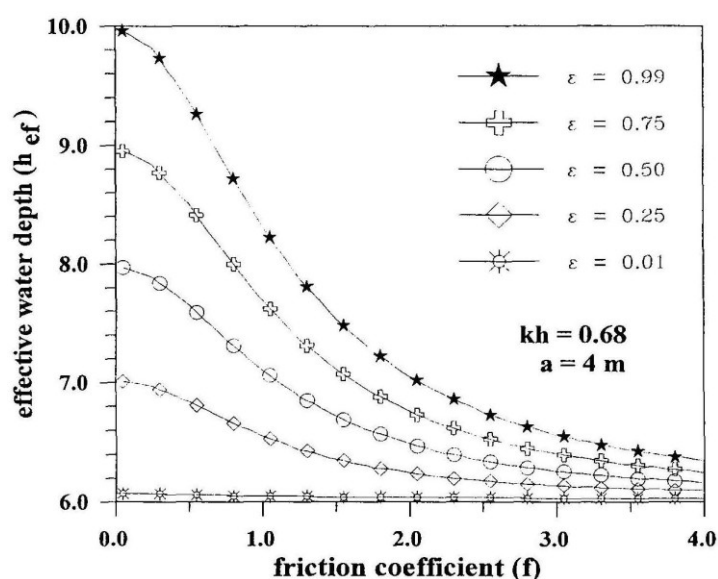


Figura 3.14. Andamento del fondale effettivo  $h_{ef}$  in funzione del coefficiente di attrito  $f$  per diversi valori della porosità  $n$  della barriera; [ $h=10m$ ,  $T=10s$ ,  $a=6m$ ]; Losada et al (1997).

Si può dunque giungere alla conclusione che, per un'onda di assegnato periodo che si propaga su di un gradino di fissata altezza, un aumento di porosità genera un incremento della profondità relativa effettiva  $kh_{ef}$ .

Gli Autori concludono osservando che il mezzo poroso tende, dunque, ad attenuare il processo di generazione di super-armoniche sia per effetto di una riduzione dell'altezza d'onda relativa, indotto dalle dissipazione attraverso il mezzo poroso, sia per effetto di un aumento del fondale effettivo e di conseguenza della profondità relativa.

### 3.7 Studio sperimentale di Brossard & Chagdali sulla generazione di armoniche libere di alta frequenza in presenza di una piastra sommersa

Nel 2001 J. Brossard e M. Chagdali presentarono i risultati di un lavoro sperimentale volto alla descrizione dettagliata dei processi non lineari di interazione tra onde regolari gravitazionali ed una piastra orizzontale sommersa. Quest'ultima rappresenta una particolare tipologia costruttiva impiegata per la protezione delle coste; la scelta di tale soluzione progettuale è in alcuni casi raccomandata per i vantaggi che è in grado di offrire dal punto di vista economico e costruttivo in presenza di fondali molto pendenti. La risposta idraulica in termini di riduzione dell'energia ondosa è soddisfacente soprattutto quando il livello della piastra è molto prossimo al livello medio mare di progetto.

Diversi Autori avevano in passato affrontato il problema dell'interazione tra moto ondoso e piastre orizzontali sommerse proponendo modelli analitici validi specialmente in condizioni di acque basse. La maggior parte di questi modelli, seppur in grado di fornire buone previsioni dei caratteri globali del processo di trasmissione, includendo in alcuni casi i modi evanescenti indotti dalla discontinuità del dominio spaziale (Le Thi Minh, 1989), erano fondati su teorie del primo ordine.

Analogamente a quanto osservato per le barriere rettangolari, la propagazione di un'onda al di sopra di una piastra sommersa è accompagnata dallo sviluppo di super-armoniche libere e legate all'armonica fondamentale di difficile previsione mediante modelli teorici. D'altra parte la difficoltà incontrata in passato dai ricercatori nel separare e misurare le componenti di ordine superiore al I rappresenta il motivo principale di una carenza nella letteratura scientifica di studi indirizzati in tal senso. Il lavoro sperimentale condotto da Brossard e M. Chagdali (2001) rappresenta uno dei pochi casi in cui la generazione di armoniche di alta frequenza viene studiata e descritta in dettaglio, isolando, per ogni frequenza, le componenti di diversa natura.

Gli Autori adoperarono un metodo innovativo per la separazione e la misura delle *bound waves* e *free waves*.

L'ipotesi generale è che il campo d'onda all'interno del canale possa considerarsi formato dalla sovrapposizione di un'onda fondamentale di pulsazione  $\omega$  e da super-armoniche di pulsazione  $n\omega$ . Queste ultime si dividono in armoniche legate in fase alla fondamentale (*bound waves*) ed onde libere (*free waves*). In analogia alle notazioni seguite nel corso dei paragrafi precedenti indicheremo con  $a_{FI,T,R}^{(1)}$  l'ampiezza dell'armonica libera di frequenza fondamentale (pulsazione  $\omega$ ), con  $a_{BI,T,R}^{(n)}$  l'ampiezza della super-armonica di ordine  $n$  legata in fase alla fondamentale ed, infine, con  $a_{FI,T,R}^{(n)}$  l'ampiezza della super-armonica di ordine  $n$  libera. I pedici "I", "R" e "T" fanno riferimento rispettivamente al moto ondoso incidente, riflesso e trasmesso.

Vale la pena ricordare che le componenti legate e libere si propagano con celerità differenti; con riferimento alle armoniche  $\omega$  e  $2\omega$  si ha:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\omega}{k_1} \\ C_2 = \frac{2\omega}{k_2} \end{cases} \quad \text{con } C_1 \neq C_2 \quad [3.85]$$

Dove con  $C_1$  si è indicata la celerità dell'onda fondamentale (e quindi anche dell'onda legata) mentre con  $C_2$  quella dell'onda libera di frequenza doppia. Sfruttando la differenza tra le celerità di propagazione, gli Autori riuscirono a separare le componenti libere e legate dello stesso ordine attraverso due sonde posizionate su carrelli in movimento a velocità costante sfruttando l'effetto Doppler (Brossard e Hémon, 1995).

Gli esperimenti furono eseguiti in un canale ad onde in piccola scala che misura  $9.5m$  di lunghezza e  $0.3m$  di larghezza. Ad un estremo il canale era equipaggiato con un generatore d'onda di tipo "flap" con pala meccanica governata da un motore elettrico. Sull'altro estremo del canale era disposta una spiaggia assorbente composta da materiale sintetico, lunga  $2m$  con una pendenza del  $10\%$  ; il coefficiente di riflessione indotto dall'assorbitore passivo misurato durante gli esperimenti era tipicamente di circa il  $2\%$ . Nella parte centrale del canale era posizionata una piastra orizzontale in acciaio inossidabile larga  $25cm$  con uno spessore di  $2mm$ . Il fondale  $h$ , prima e dopo la piastra, era mantenuto costante e pari a  $0.188m$  per tutte le prove.

La Figura 3.15 mostra uno schema dell'apparato sperimentale utilizzato dagli Autori.

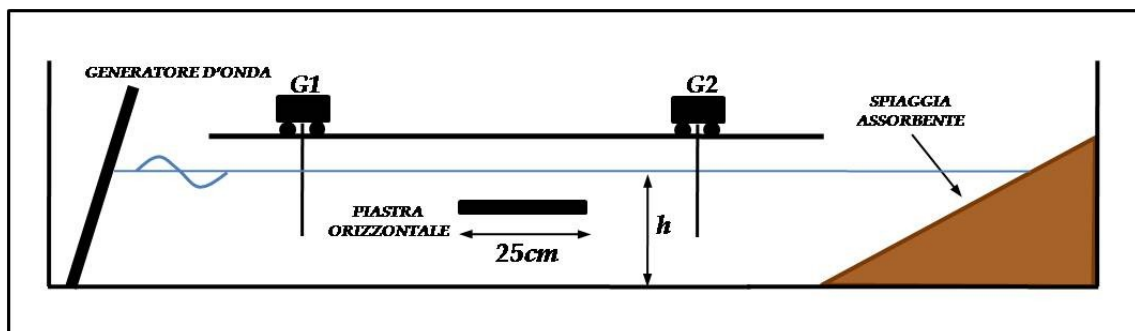


Figura 3.14. Schema dell'impianto sperimentale adoperato da Brossard e Chagdali (2001).

L'indagine sperimentale prevedeva due diverse sessioni di prove. L'obiettivo della prima sessione era quello di studiare la generazione di super-armoniche al variare della frequenza dell'onda fondamentale. In questi esperimenti la scelta dell'unico valore dell'ampiezza dell'onda incidente venne effettuata con l'obiettivo di ridurre al minimo la ri-riflessione sulla pala del generatore indotta dalla presenza della piastra. Una volta fissata l'ampiezza, dunque, furono variate le frequenze nel range  $1-2.5 \text{ Hz}$  a cui corrispondevano numeri d'onda  $k_1$  associati all'armonica fondamentale appartenenti al range  $5.3-24.6 \text{ m}^{-1}$ , con uno passo di  $0.55 \text{ m}^{-1}$ . Ogni test venne eseguito con tre diversi livelli di sommersenza; questi erano: il  $24\%$ ,  $48\%$  e  $74\%$  del fondale  $h$ .

La seconda sessione di esperimenti era volta allo studio dell'influenza che l'ampiezza dell'onda incidente aveva sulla produzione di onde libere di doppia frequenza. In questo caso, si considerarono soltanto due livelli di sommergenza (24% e 48%) e per ognuno di essi si mantenne costante la frequenza in modo tale da avere per le due sommergenze un numero d'onda rispettivamente pari a 9.7 e 7.5  $m^{-1}$ . Le ampiezze variavano in un range tra 8 e 30mm

Il processo di elevazione della superficie libera era misurato mediante due sonde resistive poste su due diversi supporti mobili messi in movimento a velocità costante di circa 0.03m/s. Conoscendo le distanze percorse dalle due sonde (2.6m) e registrando i dati con ogni sonda ad una frequenza di 200Hz, fu possibile, sfruttando l'effetto Doppler, misurare le ampiezze  $a_{I,R,T}^{(1)}$ ,  $a_{BI,R,T}^{(2)}$  e  $a_{FI,R,T}^{(2)}$ .

Le misure eseguite durante i test, che si limitano alle armoniche di pulsazione  $\omega$  e  $2\omega$ , evidenziarono una presenza di disturbi secondari indotti dal battitore molto modesta; le armoniche libere del II ordine generate dal battitore erano sempre non superiori al 4% dell'ampiezza fondamentale e di conseguenza non sono stati considerati nella discussione dei risultati.

Per quel che riguarda lo studio delle componenti ondose del I ordine, in Figura 3.16 e 3.17 sono riportati gli andamenti del coefficiente di riflessione  $K_R$  e del coefficiente di trasmissione  $K_T$  riferiti ai risultati sperimentali ottenuti durante la prima sessione di prove. Questi sono calcolati come segue:

$$\begin{cases} K_R = \frac{a_R^{(1)}}{a_I^{(1)}} \\ K_T = \frac{a_T^{(1)}}{a_I^{(1)}} \end{cases} \quad [3.86]$$

Dalle figure si nota come la piastra, per il valore più basso della sommergenza (24%), sia particolarmente efficace, sia in termini di energia riflessa che trasmessa, per valori del numero d'onda compresi tra 5 ed 11.5  $m^{-1}$ . In questo intervallo l'ampiezza d'onda trasmessa è circa il 50% di quella incidente; nello stesso intervallo anche il coefficiente di riflessione attinge i valori massimi che si attestano intorno al 60%. Per le sommergenze relative più alte (48% e 74%) la piastra si rivela invece molto poco efficace; i coefficienti di trasmissione si mantengono pressoché costanti al variare di  $k_I$  intorno al 90%. D'altra parte anche il coefficiente di riflessione è molto ridotto e attinge un valore costante, in tutto l'intervallo, circa pari al 20%. I risultati mostrati nelle figure precedenti sembrano suggerire che l'utilizzo delle piastre orizzontali sommerse per la protezione delle coste sia consigliabile soltanto con valori molto bassi della sommergenza.

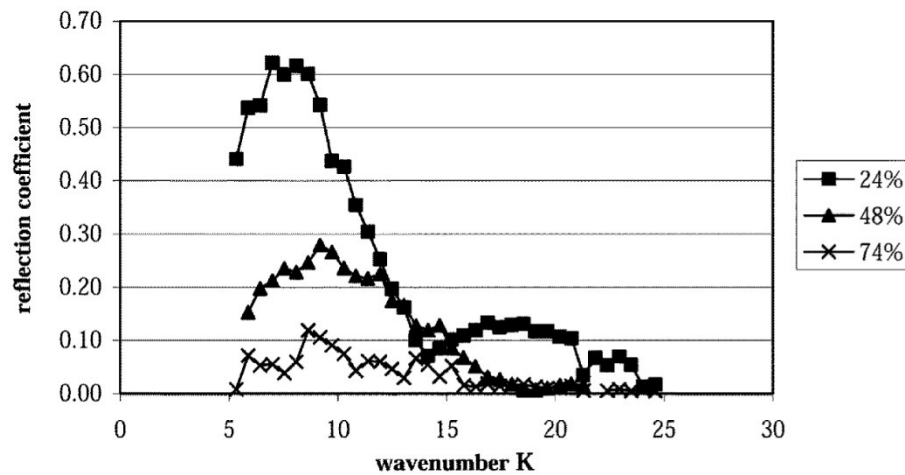


Figura 3.16. Coefficiente di riflessione in funzione di  $k_1$  per i tre diversi livelli di sommergenza (24%, 48% e 74%); Brossard e Chagdali (2001).

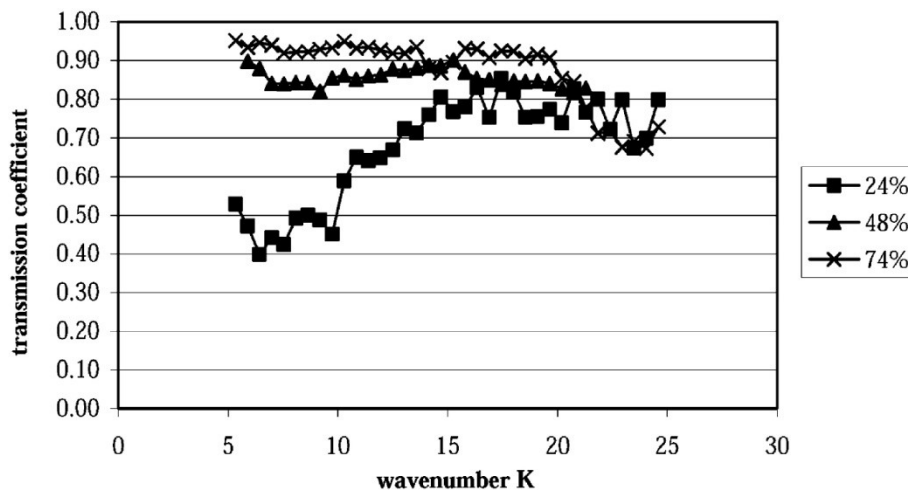


Figura 3.17. Coefficiente di trasmissione in funzione di  $k_1$  per i tre diversi livelli di sommergenza (24%, 48% e 74%). Brossard e Chagdali (2001).

Le Figure 3.18 e 3.19 mostrano un confronto tra i dati misurati da J. Brossard e M. Chagdali (2001), relativi al valore più basso della sommergenza, con i risultati di uno studio sperimentale condotto da Patarapanich e Cheong (1989) con sommergenze relative di 0.2 e 0.3. I grafici riportano l'andamento del coefficiente di riflessione (Figura 3.18) e del coefficiente di trasmissione (Figura 3.19) in funzione del rapporto  $B/\lambda$ , dove  $B$  rappresenta la larghezza della piastra e  $\lambda$  la lunghezza d'onda calcolata sulla piastra.

I grafici mostrati rivelano un buon accordo per il coefficiente di riflessione per valori del rapporto  $B/\lambda$  minore di 0.6. Per quel che concerne il coefficiente di trasmissione l'accordo tra i dati è sicuramente peggiore. Gli Autori giustificarono tale fatto con le diverse metodologie di misura delle componenti ondose riflesse e trasmesse. Di fatto, Patarapanich e Cheong determinarono le suddette ampiezze attraverso la misura dell'ampiezza massima e minima del campo d'onda parzialmente stazionario attraverso l'utilizzo di stazioni di misura fisse. Tale metodo è sicuramente meno accurato di quello proposto dagli Autori ed inadatto a misurare ed isolare con



precisione le componenti armoniche di ordine superiore che, come è lecito aspettarsi, nel campo ondosso trasmesso non sono trascurabili.

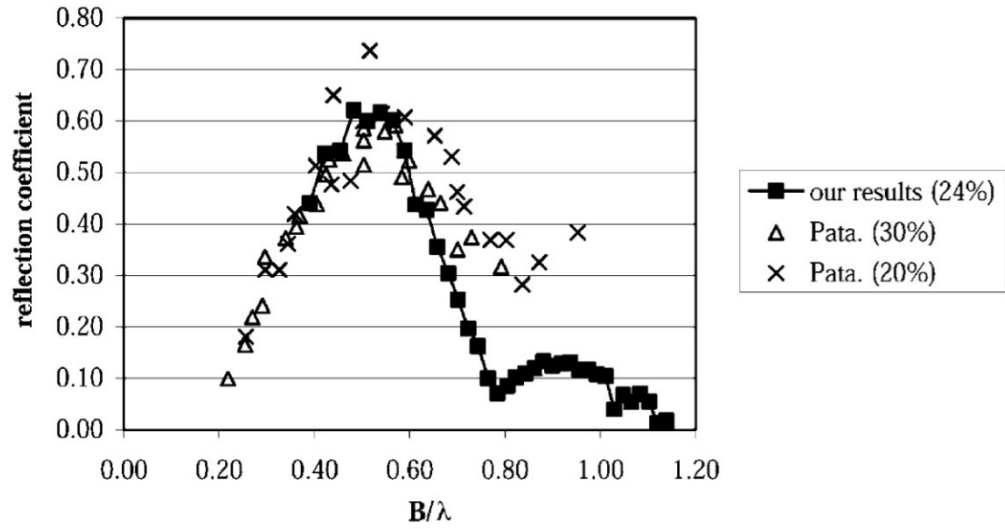


Figure 3.18. Confronto tra i coefficienti di riflessione misurati da J. Brossard e M. Chagdali (2001) e quelli di Patarapanich e Cheong (1989).

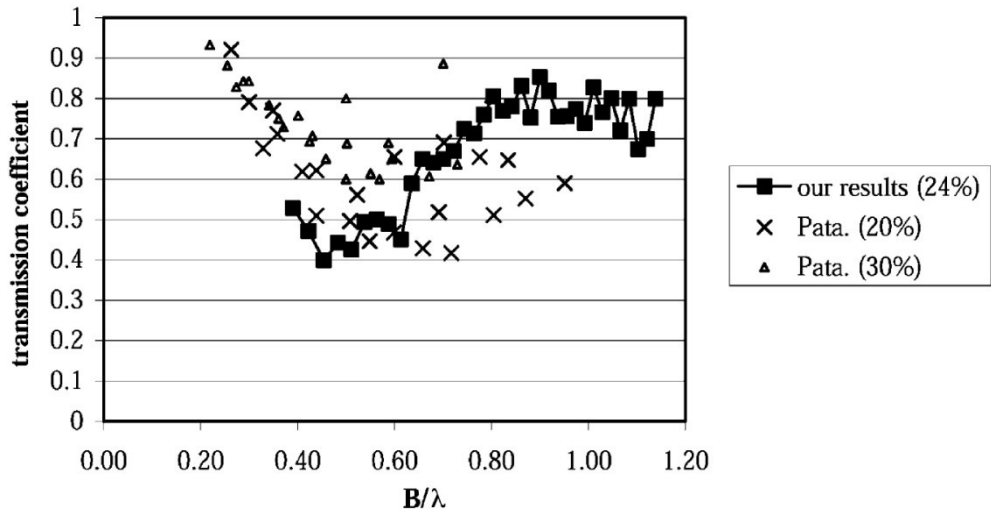


Figure 3.19. Confronto tra i coefficienti di trasmissione misurati da J. Brossard e M. Chagdali (2001) e quelli di Patarapanich e Cheong (1989).

Per quanto concerne lo studio delle componenti armoniche del II ordine, gli Autori mostrarono in prima analisi un confronto tra le ampiezze delle *bound waves* misurate  $[a_{BT\_mis}^{(2)}]$  durante gli esperimenti e quelle previste dalla teoria di Stokes del II ordine  $[a_{BT\_StokesII}^{(2)}]$ . Come ampiamente osservato nel corso dei paragrafi precedenti, queste ultime dipendono dal fondale e dall'ampiezza dell'armonica fondamentale. La Figura 3.20 mostra tali confronti per tutti e tre i livelli di sommergenza riferiti alle super-armoniche trasmesse a tergo della barriera. In ordinate sono riportati i rapporti tra le ampiezze legate misurate e quelle teoriche mentre in ascissa in numeri d'onda  $k_l$ .

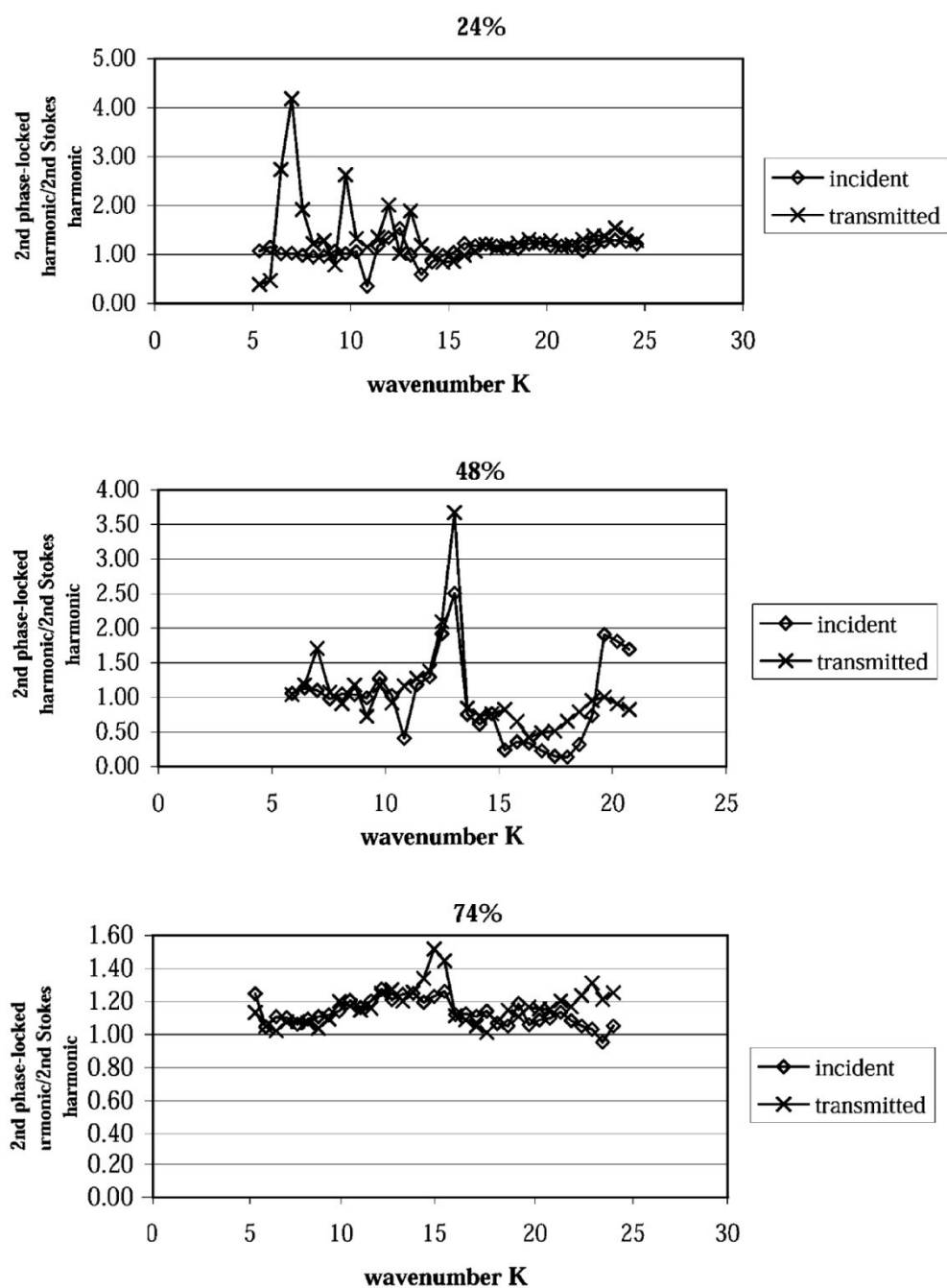


Figura 3.20. Andamento del rapporto tra ampiezze legate misurate e quelle calcolate con la teoria di Stokes II in funzione del numero d'onda; Brossard e Chagdali (2001).

Per tutti i valori riferiti alla sommergenza relativa del 74% e per quelli di sommergenza 48% limitatamente ad un certo intervallo dei numeri d'onda  $k_1$ , i dati sperimentali sono in un discreto accordo con la teoria di Stokes II. Per la sommergenza relativa del 48% gli Autori non spiegano le discrepanze evidenti dal grafico, ma si limitano ad osservare che esse hanno luogo per valori della lunghezza d'onda prossimi a  $2B$ . Per le sommergenze relative del 24% si rivela una forte discrepanza con la teoria di Stokes II per i valori più piccoli di  $k_1$  (lunghezze d'onda più elevate). Tale fatto è dovuto senz'altro alla sensibilità della metodologia della misura al variare del numero d'onda. Ciò che fu evidenziato dagli Autori è senz'altro confermato dagli studi affrontati in questo lavoro di tesi. Di fatto, all'aumentare della lunghezza d'onda riferita alla

armonica fondamentale, aumenta la distanza di ricorrenza dell'oscillazione delle componenti di Fourier di pulsazione  $2\omega$ . Ciò è dovuto ad una differenza sempre più ridotta tra le celerità di propagazione delle differenti componenti del II ordine. Per frequenze fondamentali molto basse, il metodo di scomposizione adoperato dagli Autori necessiterebbe di una distanza di percorrenza della sonda mobile troppo elevata e non disponibile nel canale utilizzato. Ad ogni modo essi utilizzarono una distanza fissa ( $2.6m$ ) non sufficiente ad effettuare misure attendibili per i test con una lunghezza dell'onda fondamentale molto elevata. Ciò spiega le discrepanze rilevate nei grafici di Figura 3.20.

La Figura 3.21 mostra l'andamento del rapporto tra l'ampiezza dell'onda libera del II ordine e quella fondamentale; per ogni livello di sommergenza tali rapporti per il campo di moto incidente, riflesso e trasmesso.

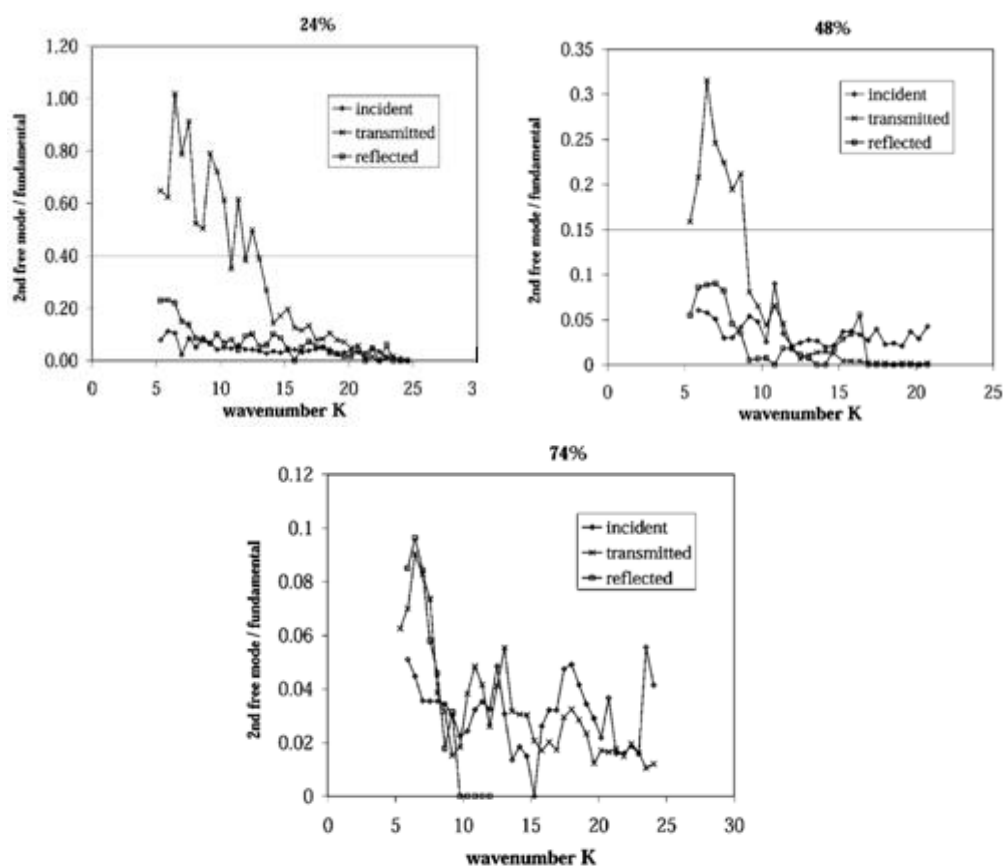


Figura 3.21. Andamento del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$  in funzione del numero d'onda; Brossard e Chagdali (2001)

Le onde libere di pulsazione  $2\omega$  incidenti e riflesse sono trascurabili in tutti i casi. Per quanto riguarda le componenti trasmesse, la piastra sommersa sembra fornire una risposta debolmente non lineare per il valore alto della sommergenza, mentre sicuramente più importante è la risposta per la bassa sommergenza. In quest'ultimo caso il valore dell'ampiezza libera del II ordine attinge un valore molto prossimo a quella fondamentale. Questi risultati dimostrano che l'interazione onda-piastra sommersa produce un trasferimento di energia sulle alte frequenze non trascurabile.

A completamento dell'indagine sulla generazione di *free waves* del II ordine gli Autori analizzarono i dati relativi alla seconda sessione di prove. Come discusso in precedenza, queste ultime si riferiscono ad una serie di test eseguiti con un solo valore del numero d'onda, variando soltanto l'ampiezza del moto ondoso incidente.

La Figura 3.22 mostra gli andamenti del coefficiente di trasmissione e riflessione. Si nota che per il livello di sommergenza maggiore (48%) il coefficiente di riflessione si mantiene pressoché costante, intorno ad un valore di circa 0.3, in tutto l'intervallo di variazione dell'ampiezza incidente. Per sommergenza minore (24%) ciò che è interessante notare è che, per valori piccoli dell'ampiezza incidente l'aliquota di energia riflessa è sorprendentemente considerevole (coefficiente di riflessione circa pari a 0.5). Ciò sta a significare che nonostante il loro ridotto ingombro nella sezione del canale (tali strutture hanno ovviamente valori della porosità molto prossimi all'unità) le piastre orizzontali godono di poteri riflettenti considerevoli. Ad ogni modo si riscontra una riduzione di tale coefficiente con l'aumento dell'ampiezza d'onda incidente e gli Autori giustificano tale riduzione con la presenza di processi dissipativi indotti dall'interazione tra vortici, che si formano in corrispondenza dello spigolo esterno della piastra, e la superficie libera.

Per sommergenza maggiore il coefficiente di trasmissione sembra mantenere un valore costante per poi decrescere debolmente per valori alti dell'ampiezza incidente; in corrispondenza di questi ultimi, infatti, diventano importanti i fenomeni dissipativi connessi al frangimento ormai avvenuto. Per sommergenze basse, invece, la riduzione del coefficiente di trasmissione sembra essere più pronunciata; tale fatto è probabilmente dovuto ad un anticipo del frangimento a causa del limitato tirante d'acqua sulla piastra.

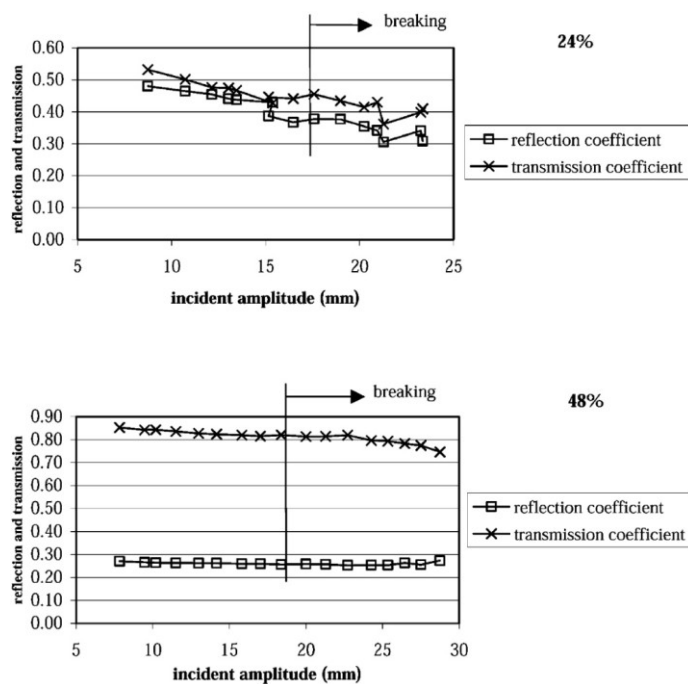


Figura 3.22. Andamento del coefficiente di riflessione e trasmissione in funzione dell'ampiezza d'onda incidente.

La Figura 3.23 mostra gli andamenti del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$ . Il grado di non linearità riscontrabile dietro la piastra è senz'altro maggiore nel caso di bassa sommergenza (24%). I quest'ultimo caso il valore dell'ampiezza libera del II ordine attinge un valore prossimo a quello della componente fondamentale. Per la sommergenza relativa del 48%, invece, il valore massimo raggiunto è di circa un terzo della componente fondamentale.

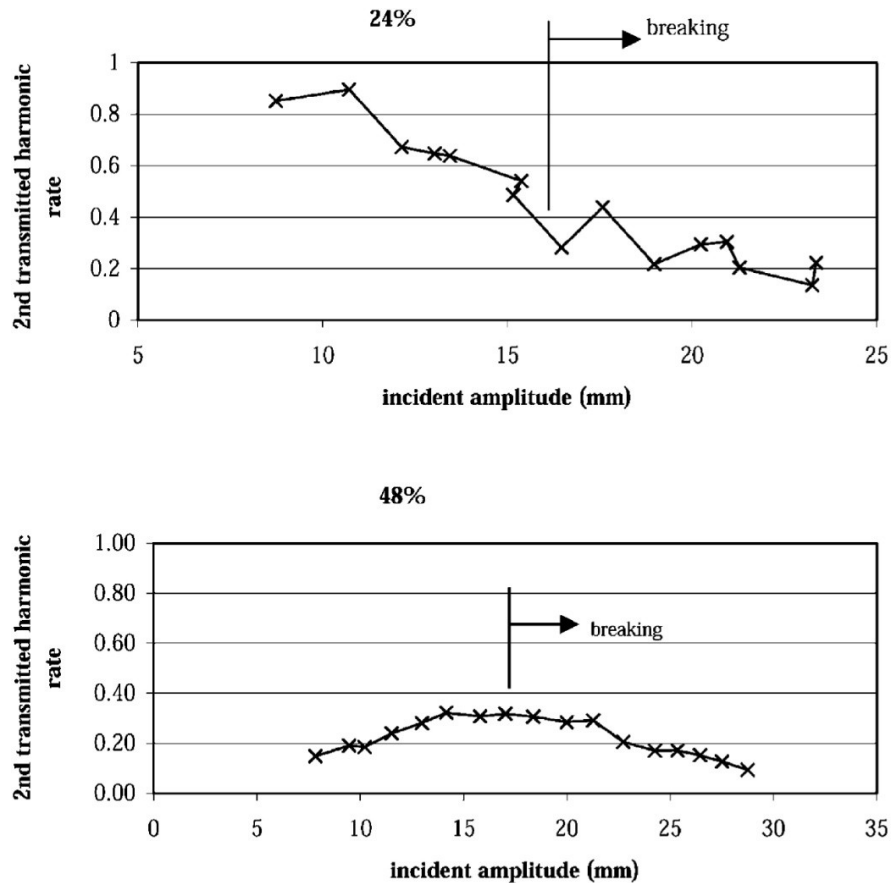


Figura 3.23. Andamento del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$  in funzione dell'ampiezza d'onda incidente.

Nei grafici sono indicati i valori delle ampiezze incidenti in corrispondenza dei quali ha inizio il frangimento. Il grafico relativo alla sommergenza del 48% indica come la produzione di *free waves* sia limitata dal frangimento e quindi dai processi dissipativi che hanno luogo al di sopra della piastra. Per la sommergenza del 24% il rapporto tra le ampiezze libere del I e del II ordine decresce in maniera monotona. Ciò starebbe a significare che il valore dell'ampiezza incidente che limita la generazione di onde libere del II ordine è molto basso. Gli Autori fornirono due interpretazioni. La prima è che per sommergenze molto basse l'ampiezza dell'onda libera di doppia frequenza è molto alta, prossima alla fondamentale, ma associata ad una lunghezza d'onda minore. Ciò rende la super-armonica libera molto ripida e quindi interessata da limite di frangimento inferiore e, dunque, soggetta a maggiori dissipazioni. La seconda ragione risiede nell'interazione tra superficie libera ed i fenomeni vorticosi che hanno luogo sui contorni della piastra. Tali interazioni producono maggiori super-armoniche inducendo però allo stesso tempo processi dissipativi.

## Capitolo 4. Analisi sperimentale

### 4.1 Generalità

Nel presente capitolo sono descritte le attività sperimentali che costituiscono il punto di riferimento per lo studio dei fenomeni oggetto del presente lavoro di tesi.

I test sono stati condotti presso il Laboratorio di Ingegneria Costiera (*LinC*) del Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Geotecnica ed Ambientale (*DIGA*) dell'Università di Napoli *Federico II*.

Nel seguito si riporta una descrizione dell'apparato sperimentale, dei modelli di barriera utilizzati, delle condizioni ondose prese in esame e degli strumenti e modalità di acquisizione dei dati.

### 4.2 Installazione sperimentale

#### 4.2.1 Il canale ad onde

Le attività sperimentali sono state condotte utilizzando il canale ad onde in piccola scala (Small Scale Channel, SSC) del laboratorio del Dipartimento DIGA dell'Università di Napoli Federico II.

L'impianto ha una lunghezza utile di circa  $22.0m$ , dal generatore d'onda alla parete terminale opposta all'ondogeno, ed è costituito da due tratti di sezione differente. Il primo, tronco conico, ha una sezione massima in corrispondenza dell'ondogeno larga circa  $0.80m$  e prosegue, per una lunghezza di circa  $9.0m$ , sino a raggiungere la larghezza utile di  $0.5m$ . Tale larghezza è mantenuta costante nel secondo tratto che si sviluppa per circa  $13.0m$ . L'altezza del canale è uniforme e pari a  $0.75m$ . In Figura 4.1 sono riportate pianta e sezione longitudinale del canale.

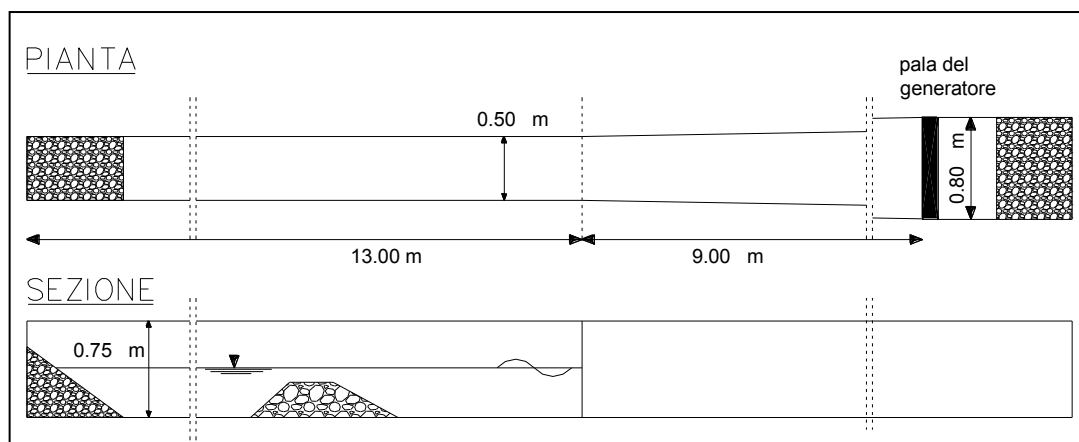


Figura 4.1. Pianta e sezione del SSC.

### 4.2.2 Il sistema di generazione

Il sistema di generazione è costituito da una pala oleodinamica a movimento traslatorio orizzontale (piston type wave-maker), collegata tramite un wave-cabinet ad un computer che genera un segnale in funzione delle condizioni ondose assegnate.

### 4.2.3 Il sistema di acquisizione

Le fluttuazioni della superficie libera in presenza di moto ondoso sono state misurate mediante sonde resistive di tipo "twin wire" (Foto 4.1), secondo lo schema mostrato in Figura 4.2.

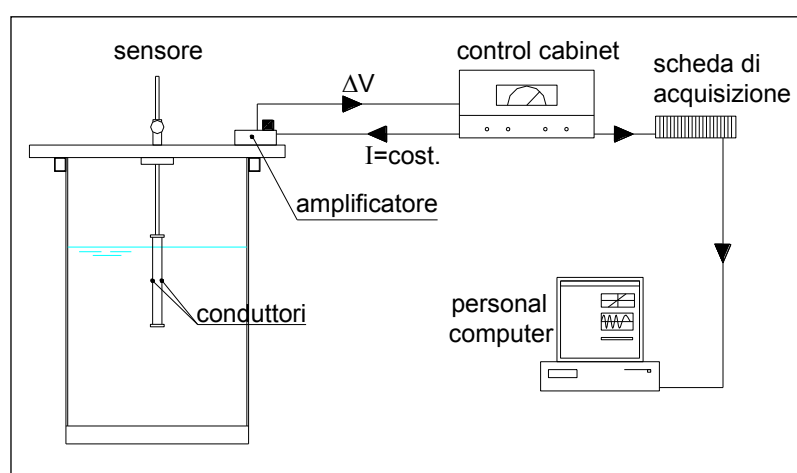


Figura 4.2. Schema del sistema di acquisizione.

I sensori sono collegati ad un circuito di alimentazione e controllo che, dopo averli alimentati, riceve un segnale di ritorno sotto forma di differenza di potenziale. Una scheda di interfaccia mette in comunicazione il circuito sonde-alimentatore con un computer, il quale effettua la conversione analogico-digitale del segnale.



Foto 4.1. "Array" di sonde.

La differenza di potenziale in uscita dai sensori è legata all'immersione delle sonde, e quindi, al tirante idrico in canaletta. La relazione tra le due grandezze, in accordo con la legge di Ohm, è teoricamente lineare e viene valutata attraverso un'operazione di calibrazione. Quest'ultima è stata eseguita all'inizio di ogni serie di prove (a cadenza giornaliera) e comunque ogni volta in cui, per effetto delle condizioni ambientali, si è riscontrata una "staratura" dovuta all'alterazione della conducibilità elettrica dell'acqua.

In pratica la procedura consiste nel misurare le tensioni relative a tiranti idrici noti, ottenuti variando l'immersione dei sensori in canaletta con l'ausilio di un apposito idrometro. Nel caso specifico l'operazione è consistita nel variare il tirante idrico di  $\pm 7\text{cm}$  rispetto al livello idrico di riferimento con un passo di  $1\text{cm}$ , misurando lo "zero" sia nella fase ascendente che in quella discendente; la scelta dell'intervallo di calibrazione è coerente con le ampiezze massime di oscillazione della superficie libera attese nelle singole prove in ipotesi di moto ondoso lineare (si veda paragrafo 4.4). La retta di calibrazione è stata ottenuta per interpolazione lineare dei punti registrati, restituendo nella maggior parte dei casi coefficienti di correlazione di circa 98-99%.

I dati trasmessi sono stati acquisiti ed elaborati utilizzando applicazioni implementate in ambiente software *LabVIEW*.

#### **4.2.4 L' assorbimento dell'energia ondosa riflessa**

La riflessione del moto ondoso generata dalla parete del canale opposta all'ondogeno, pone un problema particolarmente delicato ed occorre pertanto utilizzare sistemi in grado di limitarne il più possibile gli effetti.

La generazione di un'onda attraverso il movimento di una pala meccanica fa in modo che quest'ultima, al termine della sua propagazione, si rifletta sulla parete opposta dell'impianto dando origine ad un campo di moto retrogrado che, sommandosi all'onda incidente, genera un moto ondoso stazionario o pseudo stazionario. È consuetudine negli studi sperimentali di Ingegneria Costiera limitare il fenomeno disponendo all'estremità del canale una spiaggia assorbente (*assorbitore passivo*) di dolce pendenza e di materiale generalmente poroso. Tale artificio sperimentale consente di ridurre significativamente l' energia riflessa, dando luogo ad un campo di moto con caratteristiche più simili a quelle che si intende studiare. Nel corso degli anni la comunità scientifica si è adoperata per mettere a punto sistemi di assorbimento che garantiscano alti rendimenti, ma al tempo stesso ridotti ingombri degli elementi assorbenti.

Una prima fase della presente indagine sperimentale è stata così dedicata a studiare il rendimento di un assorbitore passivo realizzato in materiale scapolare con porosità del 40%, definendone il profilo ottimale. A tal fine, diversi profili di spiaggia sono stati sollecitati con treni di onda regolari di caratteristiche pari a quelle indicate nel paragrafo 4.4 e che costituiscono i parametri ondosi "di target". Il campo di moto risultante è stato acquisito in quattro diverse posizioni ed analizzato mediante la tecnica di separazione lineare di Ling & Huang (2006). Mediante tale approccio si è definita una configurazione ottimale dell'assorbitore che, garantendo coefficienti di



riflessione lineari ritenuti accettabili (non superiori all' 8%), occupasse al tempo stesso una porzione limitata del canale, in modo da consentire lo svolgimento dell'indagine. In definitiva è stato definito un profilo mistilineo (Figura 4.3 e Foto 4.2) di altezza massima 55cm rispetto al fondo del canale e composto come segue: un primo tratto, di 3m in proiezione, presenta pendenza 1/10; un secondo tratto di 1m decresce con pendenza di 1/20 procedendo quindi verso il fondo del canale con pendenza ancora di 1/10 per un ultimo tratto di 2m. Tenendo presente che il tirante massimo di prova è stato posto pari a 31.5cm, è evidente come l'assorbitore presenti un profilo convesso, in accordo con le indicazioni di Svendsen (1985), per circa 25cm di altezza (l'80% del tirante) distaccandosi da questo solo nella parte finale.

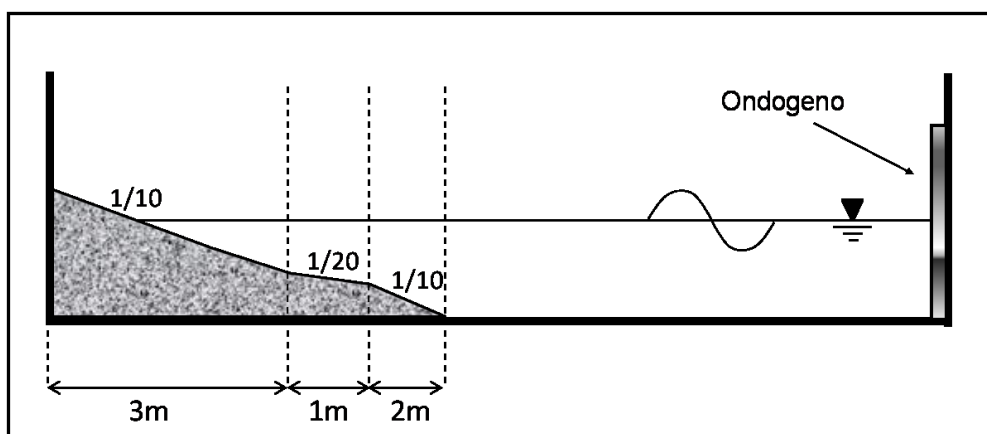


Figura 4.3. Schema dell'assorbitore passivo



Foto 4.2. Foto prospettica dell'assorbitore passivo

La riflessione sull'estremità opposta al generatore d'onda non costituisce l'unica causa di effetti indesiderati che hanno luogo durante le prove di laboratorio. Contrariamente a quanto avviene nei casi reali, l'onda residua riflessa dalla spiaggia assorbente, incontrando il battitore d'onda, subisce un'ulteriore riflessione. Quest'ultima dà origine ad un disturbo del campo di moto che falsa di fatto le misure di oscillazione del pelo libero. Tale fenomeno, che potremmo chiamare di *ri-riflessione*, può essere limitato sostanzialmente in due modi:

- Implementare un sistema di assorbimento “attivo” in corrispondenza dell’ondogeno. Tale sistema, opportunamente tarato, calcola, per mezzo di opportuni sensori, il segnale quasi stazionario che ha luogo in prossimità del generatore e ne sottrae gli effetti indesiderati modificando la sequenza di movimenti dell’ondogeno.
- Per il solo caso di moto ondoso regolare, una volta definita la posizione di acquisizione dei dati ondosi all’interno del canale, è possibile valutare il tempo che l’onda incidente impiega a propagarsi in direzione della spiaggia assorbente (o di qualsiasi altro ostacolo), riflettersi sulla stessa, attraversare ancora la posizione di misura, giungere di nuovo al battitore e ritornare alla medesima stazione. Si può assumere che in tale intervallo di tempo il segnale d’onda non sia disturbato da fenomeni di *ri-riflessione*.

Durante le prove sperimentali svolte nell’ambito del presente lavoro, che impiega onde periodiche, si è optato per la seconda soluzione. Sebbene la fluttuazione della superficie libera venisse registrata per l’intera durata della prova (complessivamente 60s), l’analisi dei dati è stata implementata soltanto su una finestra temporale definita in base ai criteri precedentemente spiegati. Per maggiori dettagli si rimanda al paragrafo riguardante la discussione delle tecniche di analisi del segnale.

### 4.3 Dimensionamento dei modelli

#### 4.3.1 Caratteristiche geometriche dei modelli fisici utilizzati

La scelta dei modelli sperimentali di barriere sommerse è stata effettuata con l’intento di riprodurre condizioni rappresentative di strutture reali ed ottenere, al tempo stesso, risultati confrontabili con lavori sperimentali presenti in letteratura. A tal fine, i modelli riprodotti sono stati dimensionati ipotizzando che gli stessi rappresentassero un ideale prototipo in scala 1:15, secondo la similitudine di Froude (Hughes, 1993). In Figura 4.4 è rappresentato lo schema tipo di una barriera sommersa con i relativi parametri geometrici che ne governano la progettazione.

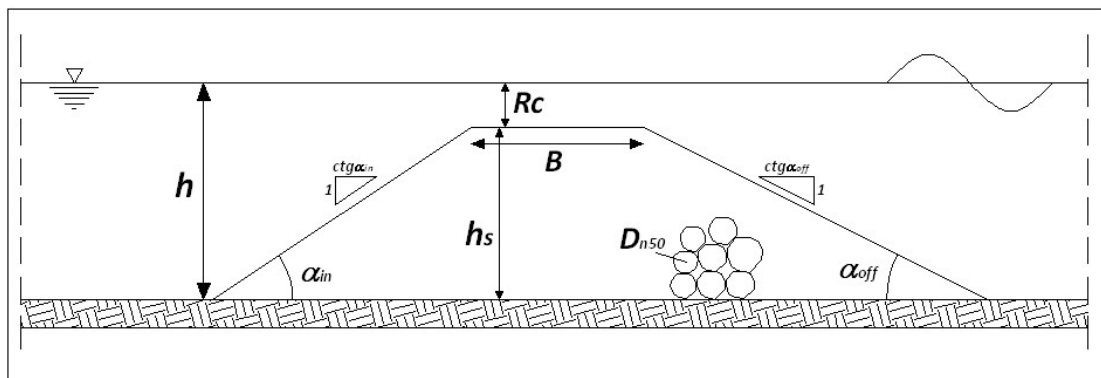


Figura 4.4. Schema di un modello tipo di barriera sommersa

Allo scopo di verificare la rappresentatività dei modelli adottati, le caratteristiche geometriche della struttura sono state confrontate con quelle delle scogliere a cresta bassa presenti nei mari italiani. Il confronto è stato eseguito facendo riferimento ad un censimento delle barriere sommerse presenti nel nostro territorio, svolto nell'ambito del progetto *DELOS* (Briganti et al. 2002). La Figura 4.5 mostra la distribuzione statistica di alcuni dei parametri geometrici evidenziati in Figura 4.4 ( $B$ ,  $R_c$  ed  $h$ ).

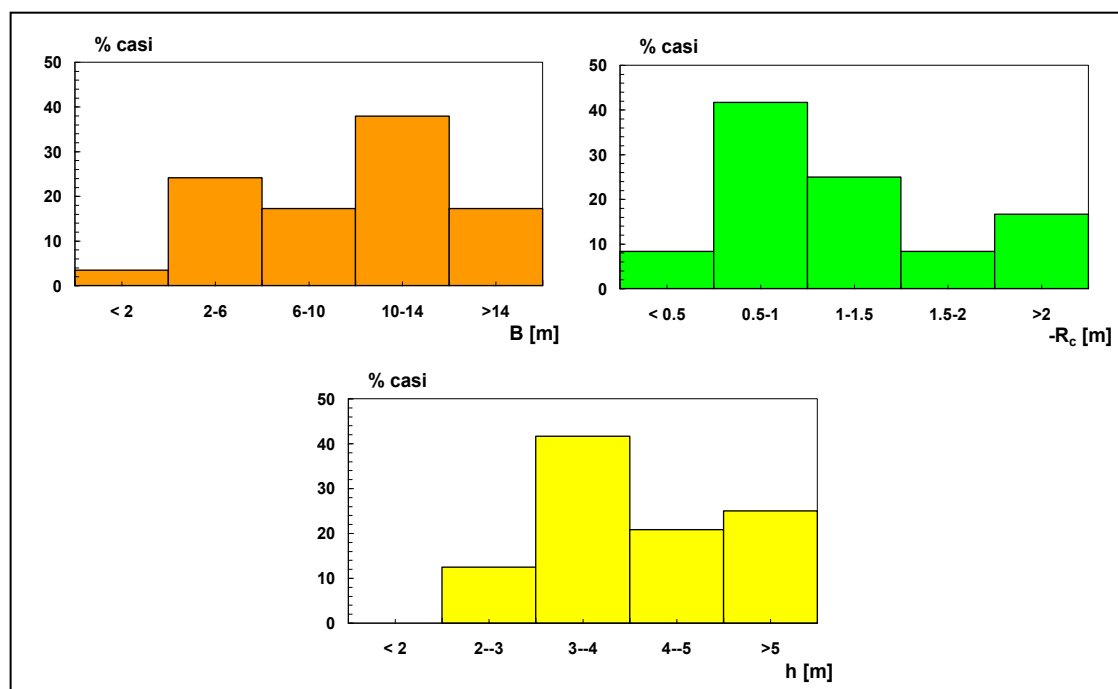


Figura 4.5. Caratteristiche geometriche delle opere di difesa sommerse in Italia

La principale variabile dimensionale per una barriera sommersa è probabilmente la quota di affondamento della cresta, che nella letteratura anglosassone viene sovente indicata con il simbolo  $R_c$  (*crest freeboard*, positivo se la struttura è emergente). Nel lavoro sperimentale qui descritto i valori scelti della sommergenza dei modelli sono di  $6.5\text{cm}$  e  $2.9\text{cm}$  (in valore assoluto) in scala di modello. Tali valori, che in scala di prototipo equivarrebbero rispettivamente a circa  $1\text{m}$  e  $0.45\text{m}$ , rappresentano grossomodo i valori modali della distribuzione di frequenza di Figura 4.5 e quindi possono essere considerati ben rappresentativi della pratica progettuale italiana.

Per quel che riguarda la larghezza della cresta ( $B$ ) il ragionamento effettuato è del tutto analogo al precedente. Nel presente studio sperimentale sono state scelte due tipologie di barriere: una barriera “corta” con larghezza di cresta  $B = 25\text{cm}$  ed una barriera “lunga” con  $B = 80\text{cm}$  (entrambe le larghezze sono riferite chiaramente alla scala di modello). Le due tipologie corrisponderebbero, in scala prototipale, a due strutture con coronamenti larghi rispettivamente  $3.75\text{m}$  e  $12\text{m}$ . Osservando la distribuzione statistica dei valori di  $B$  riportata in Figura 4.5 si nota quanto tali valori rappresentino una consuetudine nelle esperienze progettuali italiane. Difatti tali larghezze appartengono alle classi modali della distribuzione.

I valori del tirante idrico ( $h$ ) al piede della struttura sono stati assunti pari a  $27.6\text{cm}$  e  $31.5\text{cm}$  in scala di modello. Riferendosi alla scala di prototipo, i due tiranti sarebbero

rispettivamente circa  $4.14m$  e  $4.72m$ . Questi valori, pur non essendo valori modali possono comunque essere considerati non inusuali, appartenendo ad una classe cui corrisponde circa  $1/5$  delle strutture censite. Ad ogni modo la scelta è stata dettata anche dalla necessità di limitare, come già accennato altrove, la generazione di onde spurie all'interno del canale, indotte dal comportamento non lineare dell'ondogeno che si muove sinusoidalmente su fondali limitati. In aggiunta, con i tiranti idrici scelti, si riesce a ridurre a valori accettabili l'energia ondosa riflessa dall'assorbitore passivo.

Infine, l'inclinazione del paramento interno è stata fissata ad  $1:1.5$ , mentre quella del paramento esterno è stata posta pari ad  $1:2$  e  $1:5$ . Il primo è un valore assai frequente nella pratica progettuale, mentre il secondo può essere considerato un limite inferiore.

L'altezza della struttura ( $h_s$ ) è stata mantenuta uniforme per tutti i modelli e pari a  $25cm$ .

#### **4.3.2 Caratteristiche dei materiali impiegati**

Tutti i modelli di barriere sommerse costruiti per questa indagine sperimentale sono costituiti da massi naturali. Uno degli obiettivi del presente lavoro di ricerca è stato quello di verificare gli effetti della porosità/permeabilità dell'opera sulla risposta idraulica della stessa, con particolare riferimento al frangimento ed alla trasmissione dell'energia, in relazione alle diverse componenti di oscillazione.

Ogni modello è stato quindi riprodotto con identiche caratteristiche geometriche, sia con sezione omogenea [permeabilità nominale  $P = 0.6$ , secondo la convenzione introdotta da van der Meer, (1992)], sia con sezione zonata, costituita da un nucleo in materiale di piccola pezzatura ed una mantellata composta da due file di massi naturali ( $P = 0.5$ ).

La pezzatura del materiale costituente la mantellata delle opere è stata scelta in modo da garantirne la stabilità sotto l'effetto del moto ondoso incidente. Il masso di mantellata aveva un diametro mediano  $D_{n50}$  pari a  $0.058m$  ed un peso di  $0.52Kg$ .

Per quel che riguarda il materiale del nucleo è necessario notare preliminarmente che l'attingimento del valore  $0.5$  della permeabilità nominale presuppone un rapporto tra il diametro mediano della mantellata e quello del nucleo pari a  $3.2$ . Tale considerazione conduce ad un valore ottimale del diametro della parte interna pari a  $0.0181m$ . In tale ottica è stato possibile reperire un materiale di caratteristiche prossime, sebbene non identiche a quelle teoricamente necessarie. Il materiale del nucleo ha infatti un diametro nominale mediano ( $D_{n50}$ ) di  $0.02m$ .

Come accennato in precedenza, lo studio degli effetti della conducibilità idraulica della barriera sul processo di trasmissione dell'energia è parte cruciale del lavoro di ricerca qui presentato. A tal fine appare chiara, dunque, l'importanza della determinazione della porosità delle diverse strutture analizzate. Per tale scopo si è proceduto come di seguito esposto:

- è stata posta in opera la struttura sagomandola come necessario;
- sono stati pesati i massi utilizzati per la realizzazione;
- noto il peso specifico dei massi, stimato per campionamento, è stato possibile valutare il volume dei pieni all'interno della barriera;
- noto il volume della struttura nella sua interezza  $V_T$  (vuoti e pieni) per differenza è stato ricavato il volume dei vuoti  $V_v$ ;
- è stata determinata la porosità della struttura:  $n = V_v/V_T$ .

#### 4.3.3 Sintesi delle caratteristiche geometriche dei modelli di barriera

Partendo dallo schema di “scogliera tipo” mostrato in Figura 4.4 sono stati in definitiva ottenuti 5 diversi modelli di scogliera sommersa. Questi ultimi sono mostrati in Figura 4.6, mentre le Foto 5.3 ne mostrano una vista.

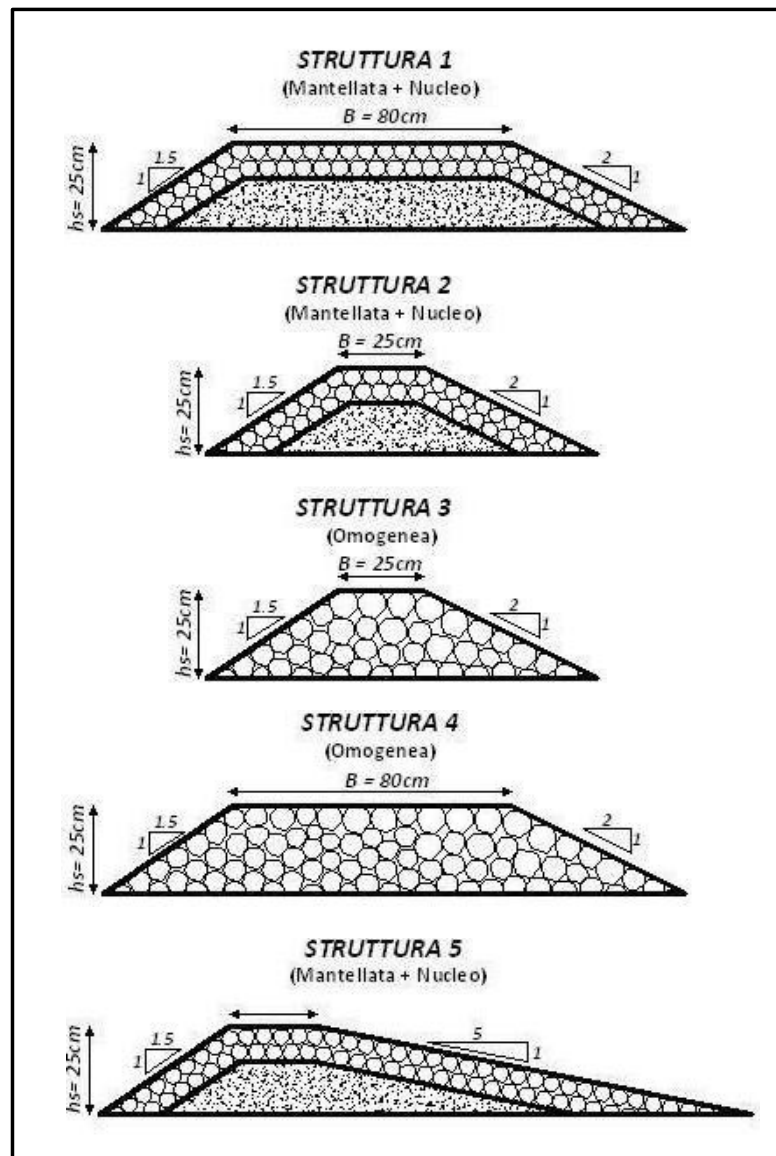


Figura 4.6. Schemi dei modelli oggetto di studio

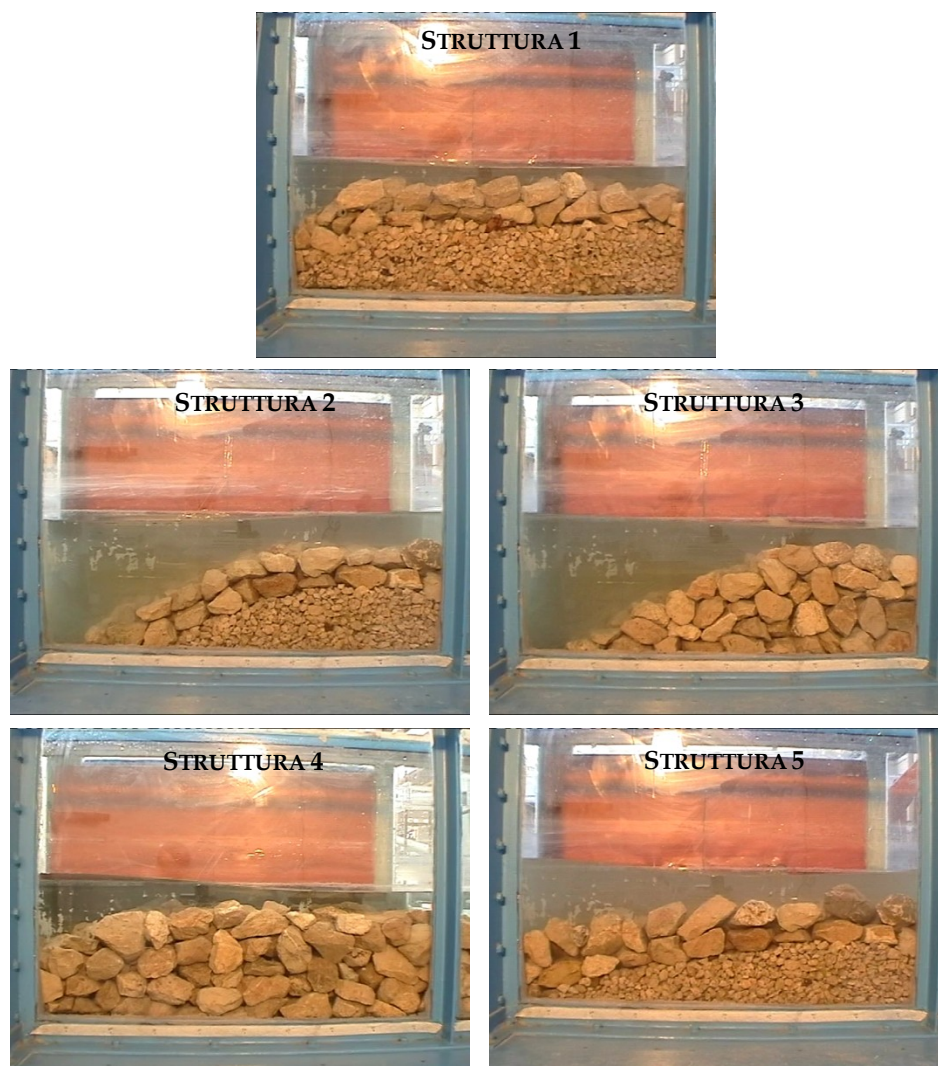


Foto 4.3. Vista dei cinque differenti modelli oggetto di studio

La Tabella 4.I fornisce un quadro sinottico delle caratteristiche strutturali.

STRUTTURA	B (cm)	hs (cm)	$\tan\alpha_{\text{off}}$	$\tan\alpha_{\text{in}}$	Prosità ( $\varepsilon$ )	P
1	80	25	0.5	0.667	0.32	0.5
2	25	25	0.5	0.667	0.32	0.5
3	25	25	0.5	0.667	0.4	0.6
4	80	25	0.5	0.667	0.38	0.6
5	25	25	0.2	0.667	0.34	0.5

Tabella 4.I. Caratteristiche dei modelli testati.

#### 4.4 Caratteristiche del moto ondoso incidente e metodologie di acquisizione dei dati

In questa indagine sperimentale sono state esaminate 40 differenti condizioni di moto ondoso incidente (al variare dell'altezza, del periodo e del tirante idrico in condizioni di quiete). Ogni test è stato effettuato preliminarmente in assenza di struttura, come fase di calibrazione, e poi ripetuto in presenza dei modelli fisici sopra descritti per un numero totale di prove pari a 210.

Le prove sono state condotte simulando onde regolari; le altezze d'onda di *target* imposte al generatore sono state fatte variare, con un intervallo di 1.0cm, da un valore minimo di 3.0cm ad un valore massimo di 12.0cm. Ogni onda è stata lanciata su fondale piatto, con tre differenti periodi ( $T = 1.0s$ ,  $T = 1.5s$  e  $T = 2.0s$ ) e con i due tiranti idrici di riferimento ( $h = 27.6cm$  e  $h = 31.5cm$ ). In particolare, al fine di evitare la formazione di onde spurie di alta frequenza generate dal battitore, le prove con tirante più piccolo ( $h = 27.6cm$ ) sono state eseguite soltanto sotto l'azione di onde con periodo 1.0s. In Tabella 4.II sono riassunte le caratteristiche dei test eseguiti in canale.

NOME TEST	h (cm)	H(cm)	T (sec)	f (Hz)	L (cm)	$\lambda$ (cm)
Test1h315T1	31.5	3.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test2h315T1	31.5	4.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test3h315T1	31.5	5.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test4h315T1	31.5	6.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test5h315T1	31.5	7.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test6h315T1	31.5	8.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test7h315T1	31.5	9.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test8h315T1	31.5	10.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test9h315T1	31.5	11.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test10h315T1	31.5	12.0	1.0	1.0	138.94	88.90
Test1h276T1	27.6	3.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test2h276T1	27.6	4.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test3h276T1	27.6	5.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test4h276T1	27.6	6.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test5h276T1	27.6	7.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test6h276T1	27.6	8.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test7h276T1	27.6	9.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test8h276T1	27.6	10.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test9h276T1	27.6	11.0	1.0	1.0	134.15	93.11
Test10h276T1	27.6	12.0	1.0	1.0	134.15	93.11
NOME TEST	h (cm)	H(cm)	T (sec)	f (Hz)	L (cm)	$\lambda$ (cm)
Test1h315T15	31.5	3.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test2h315T15	31.5	4.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test3h315T15	31.5	5.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test4h315T15	31.5	6.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test5h315T15	31.5	7.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test6h315T15	31.5	8.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test7h315T15	31.5	9.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test8h315T15	31.5	10.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test9h315T15	31.5	11.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test10h315T15	31.5	12.0	1.5	0.667	238.72	307.80
Test1h315T2	31.5	3.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test2h315T2	31.5	4.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test3h315T2	31.5	5.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test4h315T2	31.5	6.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test5h315T2	31.5	7.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test6h315T2	31.5	8.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test7h315T2	31.5	9.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test8h315T2	31.5	10.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test9h315T2	31.5	11.0	2.0	0.50	332.80	841.91
Test10h315T2	31.5	12.0	2.0	0.50	332.80	841.91

Tabella 4.II. Caratteristiche dei test effettuati.



Coerentemente con l'obiettivo dello studio sperimentale, per ogni test effettuato il profilo d'onda è stato registrato in differenti posizioni dietro la struttura. In seguito si farà riferimento ai test condotti in presenza di strutture tenendo presente che la procedura descritta è stata eseguita alla stessa maniera anche nella fase di "calibrazione".

La fluttuazione temporale della superficie libera è stata registrata per mezzo di sonde resistive in differenti sezioni del canale. Le registrazioni sono state effettuate per un totale di 60s e la frequenza di acquisizione delle sonde è stata fissata in 25 Hz.

Gli schemi di misura sono risultati differenti per le diverse prove, in considerazione della fisica di base che governa i fenomeni oggetto di indagine, nonché delle limitazioni temporali necessariamente imposte a questo lavoro.

È stato ampiamente discusso nei capitoli precedenti delle caratteristiche fluttuazioni delle componenti di Fourier associate alla risposta non lineare delle barriere sommerse. In analogia con la teoria dell'ondogeno non lineare, l'interazione tra componenti legate e componenti libere delle super-armoniche dovrebbero condurre ad una fluttuazione, in particolare della seconda e terza super-armonica, con lunghezza di ricorrenza  $\lambda$  pari a  $\pi/(k_2/2 - k_1)$ . Per le condizioni sperimentali oggetto di indagine i valori di  $\lambda$  sono riportati nella Tabella 4.II

Per il periodo di 1s la lunghezza di ricorrenza risulta inferiore alla porzione di canale disponibile (circa 3.5m) per le misure a tergo delle strutture; non così invece per le onde con periodo maggiore. Si è deciso quindi, per  $T = 1s$ , di seguire le possibili fluttuazioni con il massimo dettaglio; di conseguenza una singola sonda resistiva è stata dislocata in 20 posizioni differenti (15 posizioni nel caso di strutture con  $B = 80cm$ ) e con un passo di 10cm. Lo schema di acquisizione (SCHEMA 1) è mostrato in Figura 4.7.

Per i casi  $T = 1.5s$  e  $2s$  la stima delle caratteristiche del processo di elevazione d'onda è stato eseguito necessariamente attraverso tecniche di campionamento. È stato quindi disposto un insieme di quattro sonde secondo lo schema (SCHEMA 2) di Figura 4.8, con il proposito di separare le componenti libere e legate delle differenti armoniche mediante l'impiego della tecnica di Ling & Huang (2004) descritta in Appendice A. Per aumentare l'affidabilità delle stime, la quaterna di sensori è stata spostata in quattro differenti posizioni.

Sfortunatamente le tecniche precedenti non sono state applicate alla struttura 5 principalmente a causa delle limitazioni temporali imposte dalla consegna del presente lavoro. Per queste due configurazioni sono disponibili unicamente le acquisizioni relative ad un' unica quaterna di sensori disposti secondo lo schema di Figura 4.8. È infine importante sottolineare che per ciascuno degli schemi di misura, la sonda più prossima al piede interno delle barriere è stata disposta oltre la cosiddetta distanza di *reforming* all'interno della quale si esaurisce la dissipazione per frangimento. Queste ultime distanze sono state valutate visivamente durante test preliminari mediante l'impiego di una striscia graduata incollata alle pareti del canale. I valori misurati saranno riportati più avanti nel corso del presente lavoro e brevemente commentati.

Sebbene già precedentemente riferito, può essere utile sottolineare che le prove di calibrazione sono state svolte in perfetta coerenza con le misure di trasmissione,



disponendo cioè i sensori nelle stesse posizioni in corrispondenza delle quali sono state effettuate le misure a tergo delle differenti opere.

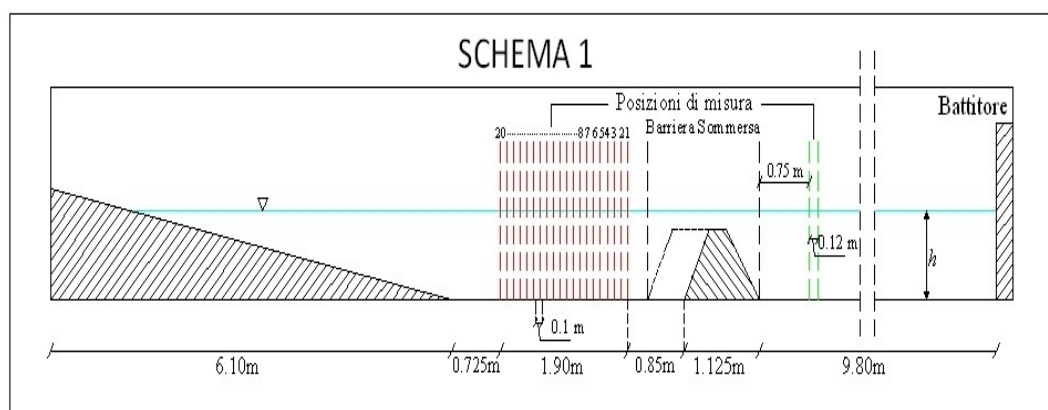


Figura 4.7. Primo layout di acquisizione dei dati ondosi (SCHEMA 1)

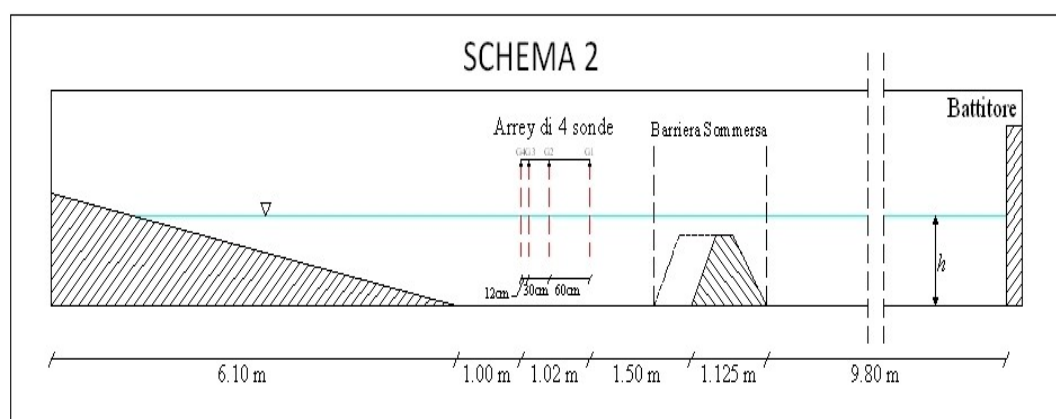


Figura 4.8. Secondo layout di acquisizione dei dati ondosi (SCHEMA 2)

## 4.5 Effetti scala

Come nella maggior parte delle indagini sperimentali condotte nel campo della Ingegneria Idraulica, ed in particolare dell'Ingegneria Costiera, il presente lavoro sperimentale è stato eseguito con l'ausilio della teoria dei modelli fisici. Chiaramente, un modello fisico "perfetto" richiede una similitudine "completa" tra modello e prototipo.

È ampiamente noto che due sistemi sono in similitudine "completa" quando tra i due sussiste non soltanto una similitudine geometrica (*geometrically undistorted model*) e cinematica, ma anche una similitudine dinamica. Quest'ultima presuppone che tutte le tipologie di forze in gioco nel processo di moto del fluido (forze inerziali, forze gravitazionali, forze viscosi, tensioni superficiali) siano in un rapporto costante:

*"Dynamic similarity between two geometrically and kinematically similar systems requires that the ratios of all vectorial forces in the two systems be the same".*  
(Warnock 1950)

Sfortunatamente, la costanza dei rapporti delle forze non è mai riscontrabile nei casi reali. Ciò significa che non tutti i fenomeni idraulici di diversa natura possono essere ben rappresentati allo stesso tempo attraverso prove su modello.

Allo scopo di rendere quanto più affidabili possibile i risultati ottenuti mediante la modellistica fisica, nel corso degli anni, sono stati sviluppati diversi criteri teorici di similitudine. Tali criteri si basano sull'assunzione che ogni processo di moto, di diversa natura, è dominato unicamente dall'azione di due specifiche forze, mentre le altre possono essere considerate trascurabili rispetto alle prime. Da qui nascono i ben noti criteri di similitudine di "Froude" e di "Reynolds" ampiamente adoperati nell'idraulica. Come già detto, in questo lavoro è stato seguito il criterio di similitudine di Froude il quale consiste nel supporre che nel moto del fluido le forze inerziali siano bilanciate unicamente (o prevalentemente) dalle forze gravitazionali. La radice quadrata del rapporto dimensionale tra tali forze è definito *Numero di Froude*:

$$\sqrt{\frac{\text{forze inerziali}}{\text{forze gravitazionali}}} = \sqrt{\frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g}} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \rightarrow \text{Numero di Froude} \quad [4.1]$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $L$  è una grandezza lineare caratteristica del fenomeno studiato,  $V$  è una velocità caratteristica e  $g$  è l'accelerazione di gravità.

La similitudine è ottenuta quando il numero di Froude si mantiene identico tra modello e prototipo; imponendo tale costanza è poi possibile valutare i fattori di scala di tutte le grandezze fisiche coinvolte nel processo.

Lavorando con i modelli di Froude si suppone indirettamente che le forze di tipo viscoso e le tensioni superficiali contribuiscano in maniera trascurabile ai processi fisici o che il moto si svolga in regime assolutamente turbolento in maniera tale che le resistenze al moto di tipo distribuito siano indipendenti dal numero di Reynolds. In ogni caso la modellazione non completa dei fenomeni reali potrebbe comportare effetti indesiderati "di scala" che possono essere generati da distorsioni associate al diverso peso che talune componenti dinamiche assumono in modello ed in prototipo. Nell'indagine sperimentale portata a termine per questo lavoro di ricerca è stata posta l'attenzione su due specifici fenomeni che potrebbero dare luogo ad effetti di scala indesiderati. Questi sono: il frangimento sulla cresta della struttura e il processo di trasmissione dell'energia ondosa attraverso il mezzo poroso costituito dalla barriera.

#### 4.5.1 Trasmissione

Quando una struttura, nel caso specifico il modello di barriera sommersa, è costruita con massi naturali, le perdite di energia dovute al passaggio dell'onda attraverso il mezzo poroso sono generalmente maggiori di quelle che hanno luogo nel prototipo (Hudson et al., 1979). Il risultato è che l'onda trasmessa a tergo della barriera risulterebbe minore di quanto effettivamente sarebbe nelle situazioni reali.

Il problema risiede sostanzialmente nel fatto che, attraverso il mezzo poroso, contrariamente a quanto accadrebbe con il prototipo, si instaura un flusso in regime parzialmente laminare o di transizione; un regime di flusso, cioè, in cui gli sforzi viscosi non sono trascurabili rispetto agli sforzi turbolenti.

Per eliminare questi effetti di scala si dovrebbe incrementare la dimensione dei massi nel modello di un certo fattore  $K$  tale che:

$$\frac{L_p}{L_m} = K \frac{D_p}{D_m} \quad \text{o equivalentemente} \quad N_L = KN_D \quad [4.2]$$

Nella [4.2]  $N_L$  è il rapporto di scala geometrico tra i due sistemi,  $D$  è il diametro nominale degli elementi costituenti la mantellata del modello,  $K$  è il fattore di distorsione (maggiore dell'unità) ed i pedici  $p$  ed  $m$  indicano che le grandezze sono riferite rispettivamente alla scala di prototipo e di modello.

Potrebbe risultare utile in prima analisi calcolare il numero di Reynolds, relativo al modello, per valutare il tipo di flusso che avviene attraverso le strutture sotto l'azione dell'onda di progetto. In accordo con Keulegan (1973) il numero di Reynolds può essere definito come segue:

$$R_n = \frac{\varepsilon_c H_i L D}{2\nu h T} \quad [4.3]$$

dove  $\varepsilon_c$  è la porosità del materiale del nucleo,  $H_i$  l'altezza d'onda incidente,  $L$  la lunghezza d'onda incidente,  $h$  la profondità al piede dell'opera,  $\nu$  la viscosità cinematica dell'acqua e  $T$  il periodo dell'onda. Considerate i parametri ondosi adoperati nel presente lavoro e le configurazioni geometriche dei modelli utilizzati risulta, per i nostri casi, un  $R_n$  compreso tra 120 e 600. Il valore di  $R_n$  indicato da Keulegan come limite oltre il quale si verifica un regime assolutamente turbolento è pari a 2000; ciò indica che il processo di trasmissione dell'energia attraverso il mezzo poroso avverrà nei nostri esperimenti in presenza di una certa percentuale di dissipazioni di tipo viscoso. Ciò ci spinge ad approfondire l'analisi degli effetti scala.

Le Méhauté (1965) e lo stesso Keulegan (1973) hanno proposto un metodo per valutare le dimensioni che i massi del modello dovrebbero avere affinché il fenomeno della trasmissione ondosa sia riprodotto correttamente senza distorsioni.

Le Méhauté (1965), attraverso considerazioni teoriche e sperimentali, sviluppò un abaco per guidare la scelta del fattore  $K$  dell'equazione [4.2]. L'Autore ipotizzò assenza di effetti scala all'interno dei meati della mantellata, dove il moto si assume turbolento, ed assunse che il materiale costituente il nucleo fosse identicamente assortito in prototipo ed in modello.

L'abaco di Le Méhauté, riprodotto da Hudson et al. (1979), è rappresentato in Figura 4.9. In tale grafico, sull'asse delle ordinate c'è il fattore di scala geometrico  $N_L = L_p/L_m$ , mentre in ascisse vi è un fattore dimensionale che combina diversi parametri della struttura. Esso è pari a:

$$\frac{H_i}{\Delta L} D_p^3 P^5 \quad [4.4]$$

Le linee continue rappresentano le curve di livello del fattore di distorsione  $K$ .

Nell'espressione [5.4]  $H_i$  rappresenta l'altezza d'onda incidente,  $\Delta L$  la larghezza media della sezione del nucleo,  $D_p$  rappresenta il diametro del nucleo in prototipo (espresso in  $cm$ ) e  $P_p (\equiv \varepsilon_c)$  la porosità del nucleo.

Osservando il grafico di Figura 4.9 è possibile fare alcune considerazioni. In primo luogo si osserva che il valore del fattore  $K$  non raggiunge mai l'unità. Ciò vuol dire che nessun modello può riprodurre il fenomeno della trasmissione di un prototipo scalando i diametri secondo la scala geometrica delle lunghezze. In secondo luogo il valore di  $K$  si avvicina ad 1 per porosità crescenti; tale fatto suggerisce che all'aumentare della porosità della struttura la probabilità che si instauri un regime turbolento attraverso il mezzo poroso, così come accade nel prototipo, è ovviamente maggiore.

Da quest'ultima considerazione scaturisce la decisione di valutare la bontà della similitudine applicata ai nostri modelli soltanto nei casi di strutture "impermeabili" e cioè dotate di un nucleo in materiale di piccola pezzatura.

In Tabella 4.III si riassumono tutti i parametri, in scala di prototipo, descritti nei paragrafi precedenti, immaginando che la barriera da noi riprodotta abbia un valore di  $N_L$  pari a 15.

STRUTTURA	$P_p$	$\Delta L$ (cm)	$D_p$ (cm)
1	0.4	127.10	30.00
2	0.4	72.10	30.00
5	0.4	106.23	30.00

Tabella 4.III. Caratteristiche di progetto del prototipo

Il valore dimensionale dell'espressione [4.4] è stato calcolato con i valori di progetto riportati in Tabella 4.III. Come altezza d'onda di riferimento è stata scelta quella di  $3cm$  essendo questa la situazione più sfavorevole per gli effetti scala.

$$\text{STRUTTURA 1 : } \frac{H_i}{\Delta L} D_p^3 P_p^5 = \left( \frac{12}{127.1} \right) \cdot [(30)^3 (0.4)^5] = 26$$

$$\text{STRUTTURA 2 : } \frac{H_i}{\Delta L} D_p^3 P_p^5 = \left( \frac{12}{72.10} \right) \cdot [(30)^3 (0.4)^5] = 46$$

$$\text{STRUTTURA 6 : } \frac{H_i}{\Delta L} D_p^3 P_p^5 = \left( \frac{12}{106.2} \right) \cdot [(30)^3 (0.4)^5] = 31$$

Dall'applicazione dell'abaco risulta in tutti e tre i casi un valore di  $K_{Lé Mèhaut}$  non superiore ad 1.2.

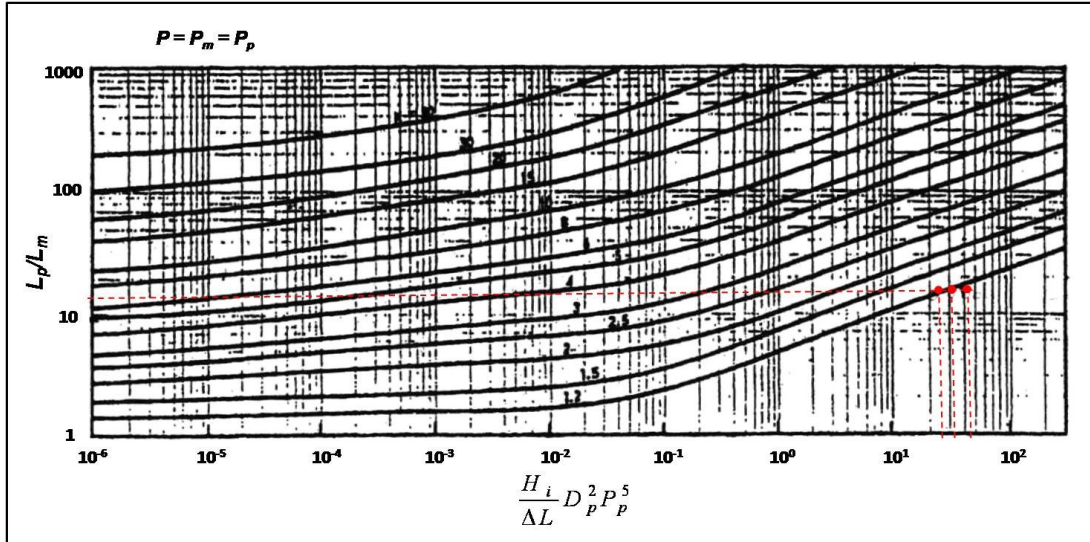


Figura 4.9. Abaco di Le Méhauté.

Per completezza di analisi è stato applicato anche il metodo di Keulegan (1973). L'Autore sviluppò un'equazione empirica per la stima del coefficiente  $K$  basata su sperimentazioni condotte con strutture di porosità pari 0.46. Successivamente il metodo fu generalizzato da Hudson (1979) utilizzando la porosità come variabile dell'equazione empirica. Il metodo fornisce due set di equazioni che permettono di valutare la trasmissione dell'onda in scala di prototipo ( $R_n > 2000$ ) ed in scala di modello ( $20 < R_n < 2000$ ). Le equazioni sono le seguenti:

per  $R_n > 2000$

$$\left(\frac{H_i}{H_t}\right)_p = 1 + \gamma_p \left(\frac{H_i}{2h}\right)_p \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_p \quad [4.5]$$

$$\gamma_p = \frac{P_p^{-4}}{10.6} \left(\frac{L}{D}\right)_p \left(g h \frac{T^2}{L^2}\right)_p^{4/3} \quad [4.6]$$

per  $20 < R_n < 2000$

$$\left(\frac{H_i}{H_t}\right)_m = 1 + \gamma_p \left(\frac{H_i}{2h}\right)_m^{2/3} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_m \quad [4.7]$$

$$\gamma_m = \frac{P_m^{-4}}{1.52} \left(\frac{\nu T}{DL}\right)_m^{1/2} \left(\frac{L}{D}\right)_m \left(g h \frac{T^2}{L^2}\right)_m^{4/3} \quad [4.8]$$

La procedura per il calcolo di  $K$  è la seguente:

- Si calcola il rapporto  $\left(\frac{H_i}{H_t}\right)_p$  applicando la [4.5] e [4.6];
- Si valuta il numero di Raynolds per valutare l'effettiva presenza di distorsioni nel modello;
- Si calcola il valore di  $D_m$  supponendo che  $\left(\frac{H_i}{H_t}\right)_p = \left(\frac{H_i}{H_t}\right)_m$ .

L'applicazione del metodo alle strutture adoperate nel presente lavoro sperimentale sotto l'azione delle caratteristiche ondose di cui al paragrafo 4.4 fornisce il seguente valore massimo del fattore di distorsione:

$$K_{Keulegan} = 1.77 \quad [4.9]$$

Seguendo le indicazioni di Hudson (1979) i valori del coefficiente  $K$  ottenuti mediante l'applicazione dei due metodi sono stati mediati ottenendo un'unica stima del fattore di distorsione pari a:

$$K_{average} = \frac{K_{Lé\ Méhaut\ é} + K_{Keulegan}}{2} \cong 1.5 \quad [4.10]$$

Dall'analisi effettuata, risulta chiaro che l'utilizzo dei modelli fisici progettati e descritti nei precedenti paragrafi generi un processo di trasmissione dell'energia ondosa, attraverso il corpo della barriera, non in perfetto regime turbolento; ci sarà, dunque, una certa aliquota di energia dissipata per via di fenomeni viscosi. Ciò comporta, dal punto di vista generale, una non perfetta rappresentazione del fenomeno, avendo scalato il modello in similitudine di Froude. D'altra parte, l'attenta analisi delle condizioni di funzionamento idraulico dei modelli fisici adoperati porta alla seguente considerazione. Le scogliere permeabili in massi naturali utilizzate in questa indagine sperimentale sono state progettate per lavorare sempre con quota di cresta al di sotto del livello idrico di riposo; tale circostanza genera un meccanismo di trasmissione dell'energia prevalentemente indotto da fenomeni di sormonto della struttura. La maggior parte dell'energia dell'onda si propaga quindi, a tergo della stessa, per tracimazione. L'aliquota di energia che passa per filtrazione attraverso il mezzo poroso costituisce soltanto una piccola aliquota di energia rispetto a quella totale trasmessa. Sulla base di queste considerazioni le misure effettuate sono state considerate non eccessivamente distorte. È altresì vero che gli effetti scala dovuti alla trasmissione attraverso il mezzo poroso, seppur piccoli, sono in ogni caso presenti. Ciò impone la necessità di approfondire il problema portando a termine nuove ricerche che permettano di capire quanto gli effetti scala di questa natura determinino distorsioni sul particolare fenomeno studiato in questo lavoro di ricerca.

#### 4.5.2 Frangimento

La necessità di riprodurre correttamente il fenomeno di dissipazione per frangimento è di centrale importanza nel funzionamento di strutture sommerse. I parametri

geometrici della struttura andrebbero dimensionati con l'intento di evitare l'insorgere di effetti scala. In realtà questi ultimi sono assai difficili da evitare quando l'interazione onda-struttura viene riprodotta alle scale di riferimento degli esperimenti qui descritti. È infatti, come commentato nei precedenti paragrafi, consuetudine progettuale europea disporre la cresta delle strutture a quota superiore a  $-1m$  rispetto al s.w.l., che corrisponde ad un valore del tirante in cresta, secondo il fattore di scala adottato in questo lavoro, inferiore a  $6.5cm$  (scala 1:15). Tale valore contraddice le indicazioni di Goda e Morinobu (1998), i quali, analizzando il processo di frangimento su piattaforme orizzontali impermeabili e sommerse, precedute da rampe di approccio di diversa pendenza (*shelf*), suggerirono di mantenere la quota di cresta sempre superiore a  $10cm$ , sebbene effetti scala evidenti, e verosimilmente connessi all'effetto della tensione superficiale, siano stati riscontrati solo per sommergenze inferiori ai  $4cm$ .

Accanto allo studio di Goda e Morinobu (1998) vanno inoltre tenuti in conto quelli di Le Méhauté (1976) e Stive (1985). Il primo concluse che il processo di dissipazione di energia connesso al frangimento delle onde rimaneva riproducibile in piccola scala solo nei suoi caratteri dissipativi macroscopici, intervenendo effetti indesiderati solo al livello delle microscale di turbolenza.

Di parere sostanzialmente coerente è il lavoro di Stive (1985) il quale condusse esperimenti in piccola e grande scala per onde regolari ed irregolari che evolvevano su un fondale di pendenza 1:40. L'Autore riscontrò risultati piuttosto prossimi, sempre in termini di dissipazione globale di energia.

Una conferma delle precedenti considerazioni nel campo più specificamente riguardante le barriere sommerse proviene dalle misure in scala 1:2-1:3 eseguite nell'ambito del progetto di ricerca europeo "*Low Crested and Submerged Breakwaters in Presence of Broken Waves*" (Calabrese et al., 2003). Qui gli Autori, analizzando il processo globale di trasmissione a tergo di modelli di barriere sommerse in scala assai prossima a quella di prototipo, verificarono una sostanziale coerenza dei risultati rispetto agli esperimenti condotti in piccola scala fino a  $R_c = 0$ .

Alla luce di quanto detto, si può ragionevolmente concludere che il fenomeno di dissipazione per frangimento sulla cresta dell'opera, almeno nei suoi caratteri macroscopici, non sia eccessivamente distorto. Coerentemente con quanto precisato da Le Méhauté, il processo di dissipazione di energia che ha luogo durante il frangimento, può essere espresso come un bilancio globale delle forze esterne trascurando il dettaglio delle dissipazioni interne. In questo modo si può assumere, con discreta approssimazione, che, sebbene le porzioni di energia dissipata nel modello sono differenti da quelle del prototipo, l'energia totale può essere considerata in similitudine tra il modello ed il prototipo.

Ad ogni modo l'influenza che i meccanismi di dissipazione, presenti durante il frangimento, indotti dalla presenza di tensioni superficiali, avrebbero sui particolari fenomeni investigati nel presente lavoro di ricerca non sono conosciuti. Ciò impone, similmente a quanto osservato per gli effetti scala presenti nel processo di trasmissione dell'energia, la programmazione di prove sperimentali ad hoc volte ad indagare quanto gli effetti distorsivi indotti dal frangimento influenzino le tipologie di misure effettuate in questo lavoro.

## Capitolo 5. Trattamento ed analisi del segnale

### 5.1 Generalità

Nel corso del Capitolo 3 è stato studiato il carattere non lineare delle barriere sommerse da un punto di vista teorico (Massel, 1986 e Goda et al, 1999). Sotto condizioni estremamente controllate, ovvero per fluido perfetto, in assenza di frangimento<sup>1</sup> e nell'ipotesi di barriera impermeabile, gli Autori hanno dimostrato che la risposta idraulica della struttura ad una sollecitazione periodica comprende un insieme di super-armoniche di frequenze multiple della dominante, sebbene quest'ultima rimanga comunque coincidente con la frequenza fondamentale del moto ondoso incidente.

Tra le super-armoniche, una parte è legata in fase all'onda principale ed una parte è libera di propagarsi con celerità di fase indipendente.

Analogamente a quanto visto a proposito della teoria non lineare del generatore d'onda (Capitolo 2), le diverse componenti interagiranno tra loro dando luogo a fluttuazioni spaziali caratteristiche dei modi di Fourier, con lunghezze di “beat” determinabili a priori.

Sebbene il comportamento appena descritto sia stato dedotto su base teorica in condizioni ideali di propagazione, gli studi sperimentali discussi nel Capitolo 3 hanno mostrato che la generazione di super-armoniche libere avviene tanto in presenza di frangimento (Grue, 1992 e Brossard e Chagdali, 2001) tanto in presenza di barriera porosa (Losada et al. 1997).

Pertanto, muovendo dalle precedenti considerazioni, l'ipotesi di base adoperata nell'analisi dei dati di questo lavoro sarà quella di postulare la presenza contemporanea nella zona protetta di componenti super-armoniche libere e legate in fase; immaginando quindi di conoscere le leggi di fluttuazione delle componenti di Fourier che conseguono dalla interazione tra le componenti di diversa natura, queste ultime possono essere separate semplicemente misurando il profilo d'onda in diverse posizioni.

Il primo passo sarà dunque quello di stimare le ampiezze dei modi di Fourier nell'area protetta. Come è noto questo compito è tutt'altro che agevole, in quanto i processi di inferenza nel dominio delle frequenze sono spesso caratterizzati da notevoli incertezze che hanno costituito l'oggetto di una vasta letteratura specializzata.

Per questo motivo il presente capitolo è dedicato alla descrizione del criterio di stima adoperato ed alla discussione delle sue proprietà. Prima di entrare nell'argomento, però, può essere utile descrivere il modello concettuale di trasmissione (dal punto di vista del trasferimento del segnale incidente verso l'area protetta) che ha costituito la cornice generale all'interno della quale è stata impostata l'intera analisi nel dominio delle frequenze.

---

<sup>1</sup> in realtà le due proprietà sono consequenziali



## 5.2 Schema del processo di trasmissione

La Figura 5.1 può essere utile ad accompagnare la descrizione dell'approccio adoperato nel modellare concettualmente il fenomeno di trasmissione.

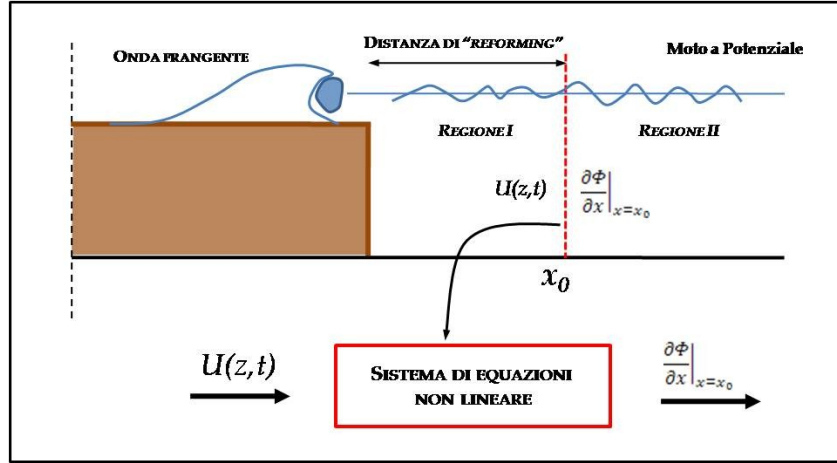


Figura 5.1. Modello concettuale del fenomeno di trasmissione.

In pratica si supporrà che nell'area protetta esista una zona (Regione II in Figura 5.1) nella quale il moto possa considerarsi a potenziale e retto dal sistema di equazioni non lineare:

$$\nabla \nabla \Phi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad [5.1]$$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad [5.2]$$

$$\left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \right\}_{z=0} \cdot \eta + \dots = 0 \quad [5.3]$$

$$g\eta + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}_{z=0} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\}_{z=0} \cdot \eta + \dots = 0 \quad [5.4]$$

Il precedente sistema di equazioni dovrà poi rispettare la condizione di congruenza aggiuntiva secondo la quale la velocità orizzontale in corrispondenza della frontiera a tra la regione I e II (linea rossa tratteggiata in Figura 5.1) sia continua:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = U(z, t), \quad z \in [-h, \eta] \quad [5.5]$$

con  $U(z, t)$  pari alla distribuzione di velocità orizzontale in corrispondenza della frontiera pensata come appartenere alla Regione I.

Così, il processo di trasmissione può essere schematizzato come l'output di un sistema non lineare soggetto ad un ingresso  $U(z, t)$ , in linea di principio incognito.

A questo punto si può ragionevolmente supporre che la forzante sia composta dalla somma di una componente periodica, di periodo pari a quello del moto ondoso incidente, e da una componente “random”, generata dal frangimento. Quest’ultima si supporrà in prima approssimazione dar luogo ad un processo stocastico, stazionario, ergodico, gaussiano, a media nulla e a spettro uniforme (*white noise*):

$$U(z, t) = U_T(z, t) + \tilde{u}(t) \quad [5.6]$$

Ora è evidente che essendo il sistema [5.1]-[5.5] complessivamente non lineare, esso andrà *perturbato*, adoperando ad esempio il parametro  $ka$ .

Supponiamo adesso, per semplicità, che entrambi i termini al secondo membro dell’Equazione [5.6] siano dello stesso ordine, ovvero del I. Adoperando la serie di Fourier si avrà:

$$U(z, t) \cong \sum_n \hat{U}_n(z, \hat{\omega}) \cdot e^{inR\hat{\omega}t} + \sum_r \tilde{u}(\hat{\omega}) \cdot e^{ir\hat{\omega}t} \quad [5.7]$$

essendo  $\hat{\omega}$  la frequenza di risoluzione e  $R\hat{\omega} = \omega$  la frequenza fondamentale del moto ondoso incidente.

A questo punto la risposta al I ordine del nostro sistema sarà corrispondente a quella del battitore lineare soggetto ad una combinazione di cosinusoidi anziché ad una soltanto. Poiché il sistema è lineare, a ciascuna delle componenti armoniche precedenti si applicherà la semplice funzione di trasferimento di Biésel (1951) [vedi Paragrafo 2.2.1], comprendente quindi una componente libera (asintotica) ed una sommatoria di modi evanescenti.

Di conseguenza, a sufficiente distanza dalla ideale superficie di separazione, lo spettro di ampiezza della risposta del sistema dovrebbe essere come quello riportato in Figura 5.2, dato cioè dalla sommatoria di un rumore bianco a spettro costante ed un insieme di componenti libere a frequenza multipla intera della fondamentale; come è evidente queste ultime rispettano la relazione generale di dispersione lineare:

$$(n\omega)^2 = gk_n \cdot \tanh(k_n h) \quad [5.8]$$

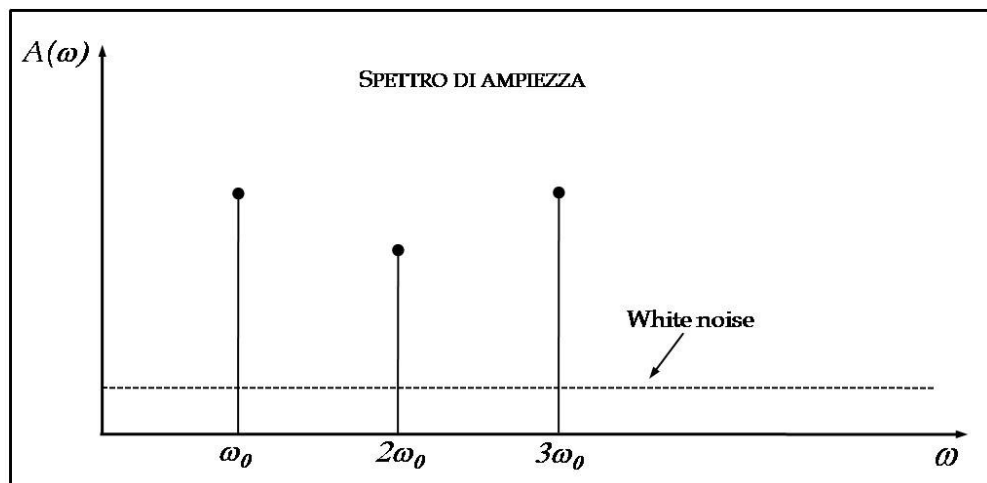


Figura 5.2. Spettro di ampiezza della risposta del sistema.

Di queste componenti, la prima (fondamentale), che si trova in acque più basse, forzerà una componente legata di frequenza  $2\omega$ , diciamo  $a_{1B}^{(2)}$ , e così teoricamente tutte le altre; tuttavia le super-armoniche libere sono più corte della fondamentale e, dunque, si trovano in acque progressivamente più alte. Di conseguenza le rispettive componenti legate dovrebbero ridursi alquanto rapidamente diventando trascurabili.

La presenza di  $a_{1B}^{(2)}$  determinerà, analogamente a quanto visto per la teoria dell'ondogeno, un disequilibrio nel secondo termine perturbativo del sistema di equazioni [5.1]-[5.5]; quest'ultimo sarà compensato da una nuova componente libera di frequenza  $2\omega$  che, combinandosi alla componente del I ordine di stessa frequenza e celerità, darà origine ad un'unica perturbazione di celerità  $2\omega/k_2$  che si propaga verso l'estremità lato protetto del canale.

Ai fenomeni precedentemente descritti si dovrà naturalmente aggiungere, quando la profondità relativa diviene sufficientemente bassa, quello di interazione tra triplette, descritto nel corso del paragrafo 2.3, nonché quello della riflessione associata alla presenza della spiaggia assorbente all'estremità dell'apparato sperimentale.

Dunque, il segnale trasmesso è assunto esser composto da "*spike*" che, oltre ad aggiungersi ad un rumore bianco, fluttuano nello spazio a causa dei fenomeni di mutua interazione non risonante.

La conseguenza diretta della precedente descrizione concettuale è che il procedimento complessivo di analisi nel dominio delle frequenze dovrà comprendere due fasi distinte:

- a) Una fase di separazione delle componenti principali dal rumore di fondo;
- b) Una fase di separazione delle diverse componenti che costituiscono i modi di Fourier a ciascuna frequenza (armoniche libere e legate), tenendo conto dei processi di mutua interazione.

Come vedremo, ciascuno dei due passi precedenti è stato affidato a procedure di stima ai minimi quadrati; nei paragrafi che seguono sarà descritta la procedura adoperata riguardo il punto a), mentre il punto b) sarà discusso nel corso del Capitolo 6.

## 5.3 La stima delle ampiezze di Fourier

### 5.3.1 La finestra utile di analisi

Come descritto nel corso Paragrafo 4.4, la fluttuazione della superficie libera è stata registrata, durante ciascuno dei test eseguiti, per una durata complessiva di 60s e con una frequenza di acquisizione di 25Hz ( $N_{punti} = 60 \times 25 = 1500$ ). A causa del caratteristico fenomeno di *ri-riflessione*, già precedentemente richiamato [si veda Paragrafo 4.2], l'analisi del segnale è stata implementata soltanto per una finestra

temporale  $\Delta\tau$  significativamente inferiore a 60s. La finestra di analisi è stata definita in base a criteri molto semplici ed applicabili in generale al caso di onde periodiche.

Si faccia riferimento dunque alla Figura 5.3. In corrispondenza dell'istante  $t_1$  per il quale il primo segnale significativo raggiunge la sonda i-esima, l'onda riflessa dalla struttura si troverà ad aver percorso una distanza verso il battitore esattamente pari a quella esistente tra lo spigolo lato mare del coronamento della barriera ed il sensore i-esimo<sup>2</sup>. L'intervallo di misura utile ( $\Delta\tau$ ) sarà dunque pari a quello necessario alla prima onda riflessa per raggiungere la posizione media del battitore, venirne ri-riflessa e giungere nuovamente al generico sensore. Poiché la distanza che l'onda di disturbo (riflessa e ri-riflessa) deve percorrere è complessivamente pari a:

$$l_0 - \Delta X^{ip} + l_0 + \Delta X^{ip} = 2l_0 \quad [5.9]$$

si avrà:

$$\Delta\tau = 2l_0 \cdot \frac{k_1}{\omega} \quad [5.10]$$

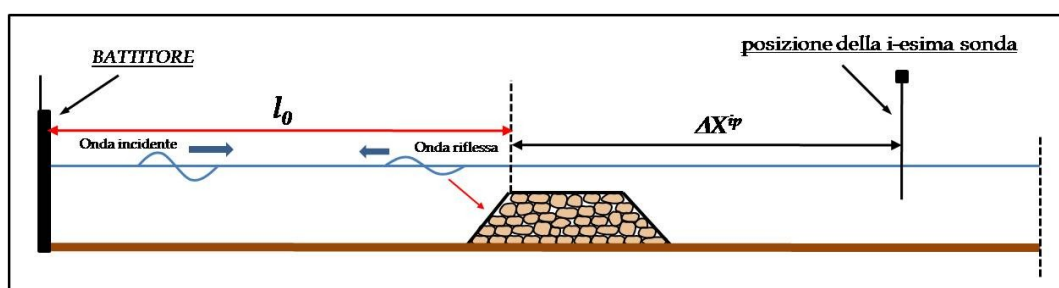


Figura 5.3. Schema di riferimento per il calcolo dell'intervallo di misura  $\Delta\tau$ .

La Tabella 5.I riassume le caratteristiche delle finestre di misura per i diversi periodi; l'ultima colonna, associata all'intestazione  $\nu$ , esprime la finestra di analisi in numero di cicli.

<b>T [s]</b>	<b><math>\omega/k_1</math> [m/s]</b>	<b><math>\Delta\tau</math> [s]</b>	<b><math>\nu</math></b>
<b>1</b>	<b>1.39</b>	<b>15</b>	<b>15</b>
<b>1.5</b>	<b>1.59</b>	<b>13</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>1.66</b>	<b>12</b>	<b>6</b>

Tabella 5.I. Caratteristiche di misura delle finestre di misura

Tuttavia la reale finestra utile ( $\Delta\tau^*$ ) sarà ancora inferiore, a causa della presenza di una fase di "ramping-up", che in tutti gli esperimenti è stata pari a 5s. Le Figure 5.4a e 5.4b aiutano a comprendere il procedimento appena descritto.

<sup>2</sup> Si introducono di fatto le ipotesi che la riflessione si completi in corrispondenza dello spigolo esterno del coronamento e che la celerità con la quale l'onda si propaga sulla struttura sia pari a quella del moto ondoso incidente.

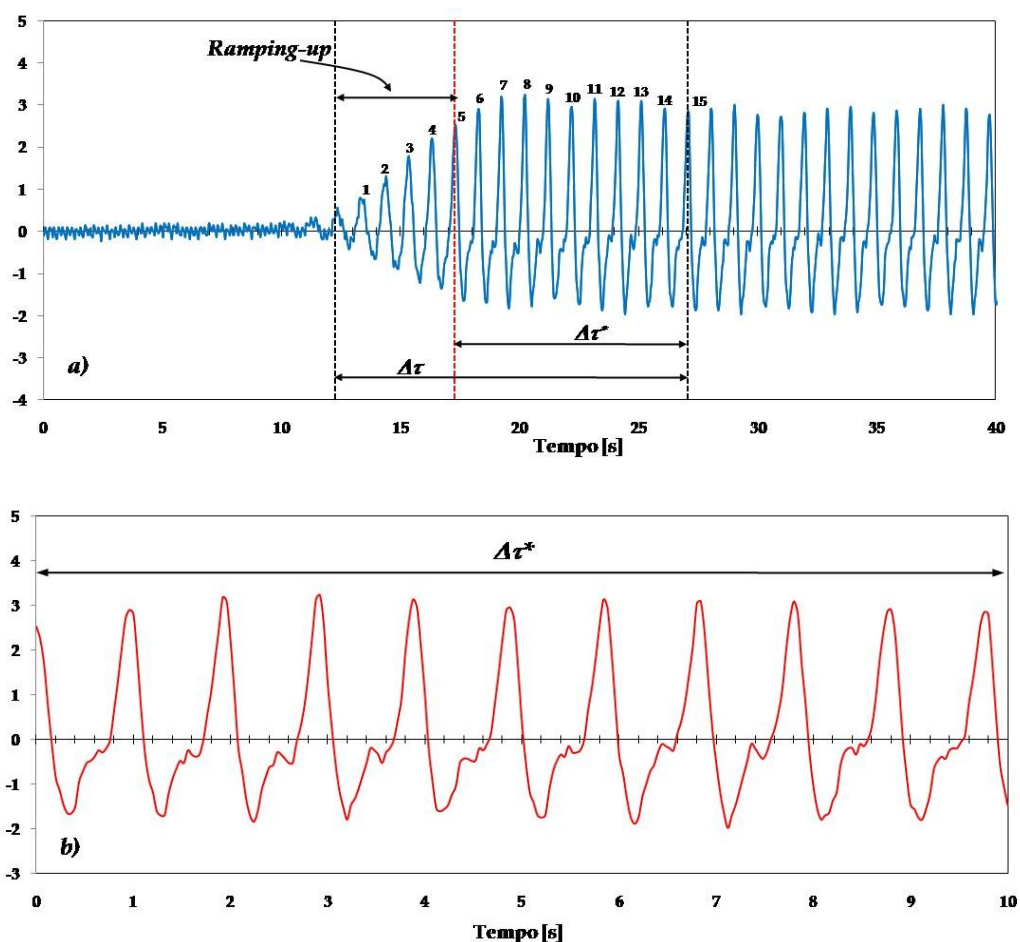
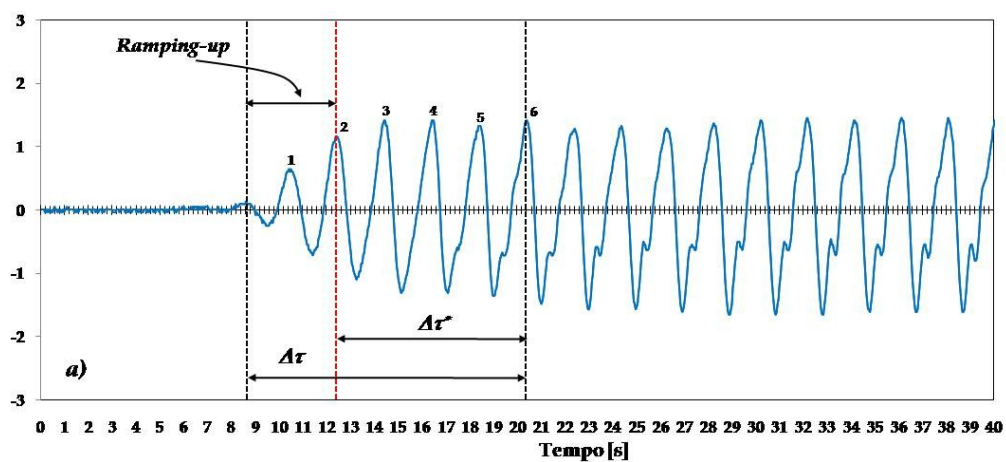


Figura 5.4. Esempio di un segnale d'onda registrato durante le prove sperimentali per un'onda di periodo  $T=1s$ ; (a) segnale intero; (b) porzione di segnale a cui si applica il processo di analisi.

Dalla precedente discussione discende immediatamente che uno dei limiti della presente analisi risiede nel fatto che, per i periodi più lunghi, il campione di segnale utile è piuttosto limitato (3-4 cicli in media per  $T=2s$ , Figura 5.5).



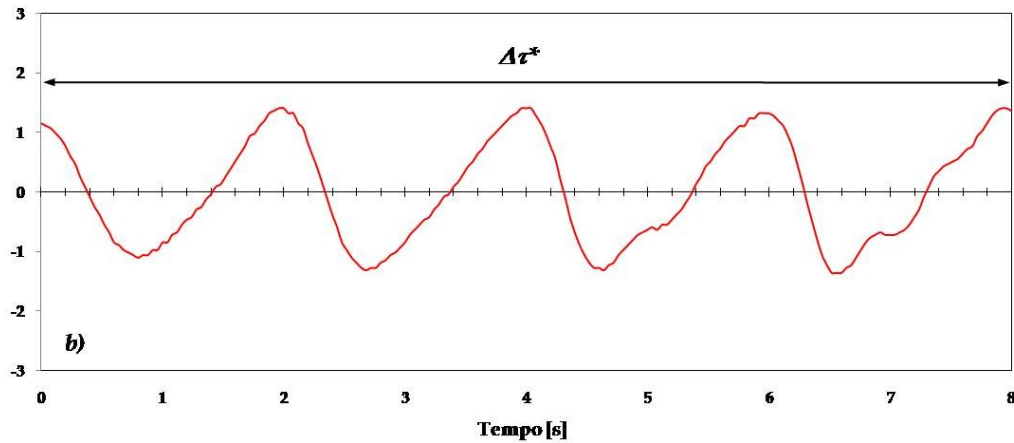


Figura 5.5. Esempio di un segnale d'onda registrato durante le prove sperimentali per un'onda di periodo  $T=2s$ ; (a) segnale intero; (b) porzione di segnale a cui si applica il processo di analisi.

Questo aspetto è una conseguenza della scelta deliberata di non usare un assorbitore attivo di riflessione nel corso di questa indagine sperimentale. Infatti questi dispositivi possono generare, specie per i periodi più lunghi, delle oscillazioni trasversali ("*cross modes*") in funzione della quantità di energia riflessa; tali oscillazioni parassite, da un lato potrebbero inficiare l'analisi del processo di trasmissione e dall'altro rendono la procedura di analisi del campo ondoso incidente in assenza di struttura piuttosto incerto; ciò in quanto il segnale restituito potrebbe non essere identico nei due casi (con e senza barriera).

In definitiva i risultati di seguito riportati per  $T=1.5s$  e  $2s$  sono intrinsecamente più incerti rispetto a  $T=1s$  (anche per altre ragioni discusse nei paragrafi che seguono) e richiedono una appropriata validazione in un canale di lunghezza sensibilmente maggiore rispetto a quello adoperato in questo lavoro.

### 5.3.2 La separazione delle componenti armoniche del segnale

Da quanto detto in precedenza, le Figura 5.4b e 5.5b rappresentano il segnale tipo cui applicare le analisi necessarie ad isolare le componenti armoniche principali di Fourier introdotte nel corso del Paragrafo 5.2.

Per illustrare al meglio la metodologia adoperata appare tuttavia necessario svolgere qualche considerazione di carattere generale.

Bisogna innanzitutto ricordare che il segnale da analizzare è campionato ad intervalli discreti nel dominio del tempo ( $dt = 1/25Hz = 0.04s$ ); di conseguenza esso può essere identificato da una n-upla di numeri reali:

$$x(k) \text{ con } k = 1, 2, 3 \dots, N \quad (N = 25 \times \Delta\tau^*) \quad [5.11]$$

che rappresenta un campione del segnale continuo "*profilo dell'onda*".

Come è noto, uno dei metodi per la stima delle componenti armoniche di cui è costituito il segnale è quello di calcolare la *Trasformata Discreta di Fourier (DFT)*,

immaginando che  $x(k)$  sia periodico di periodo  $T_0 = \Delta\tau^*$ . La DFT di  $x(k)$  si esprime come segue:

$$X(q) = \sum_{k=1}^N x(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}qk} \quad \text{con } q = 1, 2, 3 \dots, N \quad [5.12]$$

dove i numeri complessi  $X(q)$  sono campionati nel dominio delle frequenze, ad intervalli regolari di ampiezza pari alla frequenza di risoluzione  $f_0$ ; quest'ultima è definita come:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad [5.13]$$

Tuttavia la stima dello spettro (di ampiezza o di potenza) di un segnale discreto ottenuta per questa via, pone una serie di problemi; di questi quello di principale interesse per questo studio è la dispersione spettrale ("*Spectral leakage*").

In effetti l'insieme delle Equazioni [5.11] e [5.12] ci mostra come nell'approccio DFT la restrizione del segnale all'intervallo  $\Delta\tau^*$  sia rappresentato, nel dominio delle frequenze mediante una base ortonormale trigonometrica (seni e coseni). In accordo con J. Harris (1978) si può mostrare che questo approccio si traduce in una interessante peculiarità della trasformazione spettrale [5.12]. In pratica, dal continuo delle possibili frequenze presenti nel segnale, solo quelle che coincidono con un elemento della base si proietteranno su un singolo elemento vettore; tutte le altre frequenze presenteranno una proiezione diversa da zero sull'intera base. Questo fenomeno è di solito indicato come "*spectral leakage*" ed è una classica conseguenza del processing di segnali di lunghezza finita.

Sebbene la quantità di *leakage* sia influenzata dal periodo di campionamento esso non è direttamente causato dal campionamento.

Un approccio intuitivo al *leakage* è quello di considerare il fatto che un segnale che possiede una frequenza diversa da quella dei vettori che compongono la base, non è periodico nella finestra di osservazione. L'estensione per periodicità di un segnale siffatto esibirà delle discontinuità agli estremi di osservazione (Figura 5.6) e proprio queste discontinuità sono responsabili della dispersione della potenza sull'intera base ortonormale.

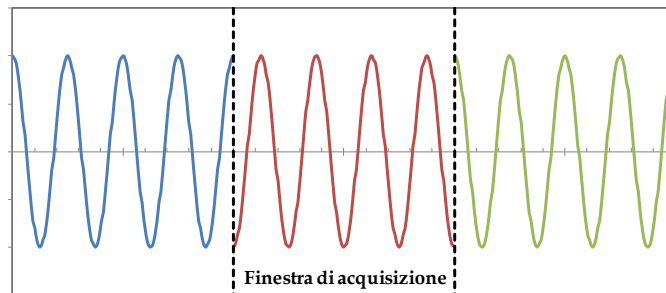


Figura 5.6. Discontinuità del segnale replicato.

Dal nostro punto di vista il fenomeno del *leakage* potrebbe divenire importante nel momento in cui l'ondogeno restituisse onde con frequenze differenti da quelle di *target* o se per qualsiasi altro motivo (ad esempio il frangimento sulla barriera) il periodo fondamentale dell'onda trasmessa non coincidesse con quello dell'onda incidente; in tal caso le stime delle ampiezze mediante DFT diventerebbero abbastanza incerte.

Come è noto, nella analisi classica dei segnali, un metodo per ridurre gli effetti di *leakage* è quello di applicare ai dati delle funzioni di peso note come "*windows*". Queste funzioni moltiplicative tendono a ridurre le discontinuità agli estremi della estensione periodica, cercando di ridurre dolcemente a zero il valore del segnale e del maggior numero di derivate possibili. Senza voler scendere nel dettaglio della teoria del "*windowing*" (che d'altra parte va al di là degli scopi di questo lavoro) appare evidente che queste funzioni di peso introducono una forte alterazione del segnale reale, nel dominio del tempo e, quindi, nel dominio delle frequenze (Figura 5.7). Ciò appare senz'altro sconveniente tenuto conto degli intervalli di analisi a disposizione che sono relativamente limitati.

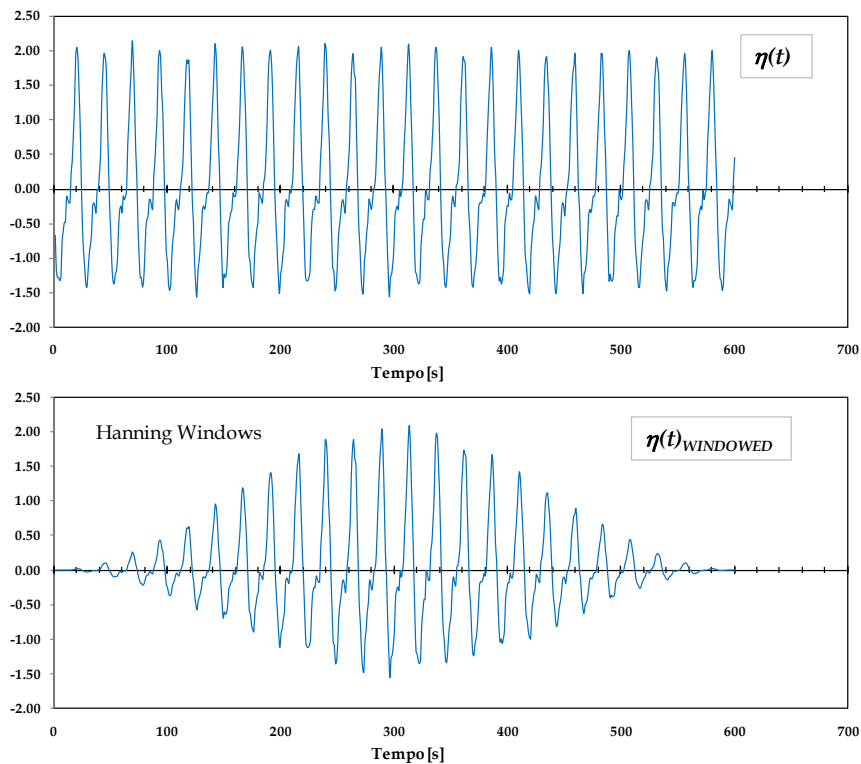


Figura 5.7. Applicazione del "*windowing*" ad un segnale  $\eta(t)$ .

I motivi appena esposti hanno dunque condotto il candidato alla scelta di un criterio di stima ai minimi quadrati [*Multi-frequency identification method*, S. Zhao et al. (2009)] basato su un approccio iterativo.

Per comprendere al meglio la metodologia adoperata, ricordiamo che nelle ipotesi fondamentali del Paragrafo 5.2 il segnale acquisito in corrispondenza della generica sonda si compone di una parte periodica e di una parte aleatoria del tipo "*white noise*". Dunque, in generale, potremmo scrivere:



$$\eta(t) = c_0 + \sum_{i=1}^n [a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)] + \varepsilon(t) \quad [5.14]$$

dove  $\omega_i$  è la  $i$ -esima armonica fondamentale di cui è costituito il segnale ed  $n$  è il numero complessivo delle armoniche della parte periodica. Naturalmente per un segnale campionato si avrà:

$$\eta(k) = c_0 + \sum_{i=1}^n [a_i \sin(\omega_i kdt) + b_i \cos(\omega_i kdt)] + \varepsilon(kdt) \quad [5.15]$$

Per i nostri esperimenti, muovendo da un'analisi preliminare degli spettri trasmessi, e tenendo in conto anche i risultati della letteratura, è stato deciso di isolare unicamente tre componenti periodiche fondamentali, immaginando che le rimanenti possano confluire globalmente nella componente "*white noise*". Di conseguenza  $n = 3$ ,  $\omega_2 = 2\omega_1$  e  $\omega_3 = 3\omega_1$ , con  $\omega_1$  che dovrebbe coincidere con la frequenza dominante del moto onduoso incidente.

Nelle ipotesi precedenti si immagini adesso di conoscere  $\omega_1$ , assunto pari alla frequenza dominante di *target*. Applicando il metodo dei minimi quadrati è possibile stimare i coefficienti  $c_0$ ,  $a_i$  e  $b_i$  della [5.15], minimizzando l'errore indotto dal rumore. In formule si ha:

$$\min_{(c_0, a_i, b_i)} \varepsilon^2 = \sum_{k=1}^N [\eta(k) - \hat{\eta}(k)]^2 \quad [5.16]$$

Minimizzare l'errore quadratico rispetto ad ogni variabile del problema si traduce analiticamente nella seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c_0} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_i} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b_i} = 0 \end{cases} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad [5.17]$$

Svolgendo le derivate, il sistema [5.17] assume la seguente forma:

$$A \cdot \mathbf{x} = B \quad [5.18]$$

$A =$

$$\begin{bmatrix} \sum_k 1 & \sum_k \text{sen}(\theta_{1,k}) & \sum_k \cos(\theta_{1,k}) & \dots & \sum_k \text{sen}(\theta_{n,k}) & \sum_k \cos(\theta_{n,k}) \\ \sum_k \text{sen}(\theta_{1,k}) & \sum_k \text{sen}^2(\theta_{1,k}) & \sum_k \cos(\theta_{1,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{1,k}) & \dots & \sum_k \text{sen}(\theta_{n,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{1,k}) & \sum_k \cos(\theta_{n,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{1,k}) \\ \sum_k \cos(\theta_{1,k}) & \sum_k \text{sen}(\theta_{1,k}) \cdot \cos(\theta_{1,k}) & \sum_k \cos^2(\theta_{1,k}) & \dots & \sum_k \text{sen}(\theta_{n,k}) \cdot \cos(\theta_{1,k}) & \sum_k \cos(\theta_{n,k}) \cdot \cos(\theta_{1,k}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_k \text{sen}(\theta_{n,k}) & \sum_k \text{sen}(\theta_{1,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{n,k}) & \sum_k \cos(\theta_{1,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{n,k}) & \dots & \sum_k \text{sen}^2(\theta_{n,k}) & \sum_k \cos(\theta_{n,k}) \cdot \text{sen}(\theta_{n,k}) \\ \sum_k \cos(\theta_{n,k}) & \sum_k \text{sen}(\theta_{1,k}) \cdot \cos(\theta_{n,k}) & \sum_k \cos(\theta_{1,k}) \cdot \cos(\theta_{n,k}) & \dots & \sum_k \text{sen}(\theta_{n,k}) \cdot \cos(\theta_{n,k}) & \sum_k \cos^2(\theta_{n,k}) \end{bmatrix} \quad [5.19]$$

$$B = \begin{bmatrix} \sum_k \eta(k) \\ \sum_k \eta(k) \cdot \text{sen}(\theta_{1,k}) \\ \sum_k \eta(k) \cdot \cos(\theta_{1,k}) \\ \vdots \\ \sum_k \eta(k) \cdot \text{sen}(\theta_{n,k}) \\ \sum_k \eta(k) \cdot \cos(\theta_{n,k}) \end{bmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \end{bmatrix} \quad [5.20]$$

dove  $\theta_i = \omega_i \cdot kdt$ .

La [5.18] rappresenta, in generale, un sistema lineare di  $(2n + 1)$  equazioni in  $(2n + 1)$  incognite; nel nostro caso si avrebbero pertanto 4 equazioni in 4 incognite.

Inoltre la matrice  $A$  dei coefficienti è una matrice reale e simmetrica.

Una volta risolto il sistema di equazioni precedenti, si ottengono le ampiezze del segnale studiato dalla:

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad [5.21]$$

Mentre le costanti di fase di ciascuna armonica saranno pari a:

$$\theta_i = \arctan\left(-\frac{a_i}{b_i}\right) \quad [5.22]$$

Come in ogni approccio ai minimi quadrati, la bontà della stima può essere valutata attraverso il coefficiente di determinazione,  $COD$ , definito come:

$$COD = 1 - \frac{\sum[\hat{\eta}(t) - \eta(t)]^2}{\sum[\eta(t) - \bar{\eta}]^2} \quad [5.23]$$

dove  $\bar{\eta}$  rappresenta la media del segnale misurato. È chiaro che  $COD$  uguale ad 1 indica un perfetto adattamento del segnale.

Tuttavia, come già spiegato in precedenza, la frequenza fondamentale  $\omega_1$  è in realtà incognita e proprio la sua stima rappresenta un passaggio fondamentale per l'applicazione del metodo.

In realtà il sistema [5.18] può essere anche applicato al segnale oggetto di studio per la ricerca della frequenza fondamentale  $\omega_1$ .

Infatti, se si osservano la [5.15] e la [5.16], appare chiaro come al variare di  $\omega_1$  vari anche la quantità  $\varepsilon^2$  e, dunque, il coefficiente di determinazione  $COD$ . Quindi, si è proceduto nel modo seguente:

- Si è scelto un intervallo di possibili frequenze dominanti centrato in  $\omega_1$  (valore di *target*) e con semi-ampiezza pari a  $0.2\omega_1$ . L'intervallo sarà dunque  $[0.8\omega_1, 1.2\omega_1]$ .
- Partendo dal limite inferiore del precedente intervallo è stata via via fissata una frequenza fondamentale di tentativo con passo incrementale  $d\omega_1 = 0.01 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ;
- per ciascuno dei valori precedenti è stato risolto il sistema [5.18];
- per ogni soluzione del sistema è stato calcolato il *COD*.

Il valore della frequenza a cui corrisponde il *COD* massimo sarà, dunque, la frequenza fondamentale del nostro segnale. La Figura 5.8 mostra l'andamento del *COD* al variare di  $\omega_1$  per un esperimento svolto con Struttura 2,  $H_i=6\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$ .

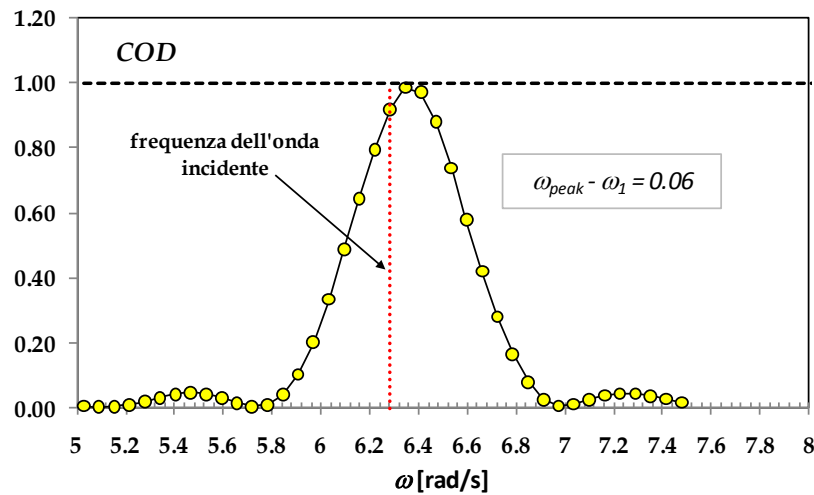


Figura 5.8. Andamento di *COD* al variare di  $\omega_1$  [Struttura 2 ;  $H_i=6\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$ ]

Dalla figura si nota come il massimo valore di *COD* non corrisponda esattamente ad una frequenza di  $f = 1/T = 1\text{Hz}$ . Tuttavia le differenze sono dell'ordine di qualche unità percentuale a conferma sia della funzionalità del canale ad onde sia della ragionevolezza del modello di trasmissione adottato.

Altri esempi sono mostrati nelle Figure 5.9 ed 5.10 e conducono a conclusioni identiche alla precedente. I coefficienti di determinazione sono risultati ovunque prossimi al 100%.

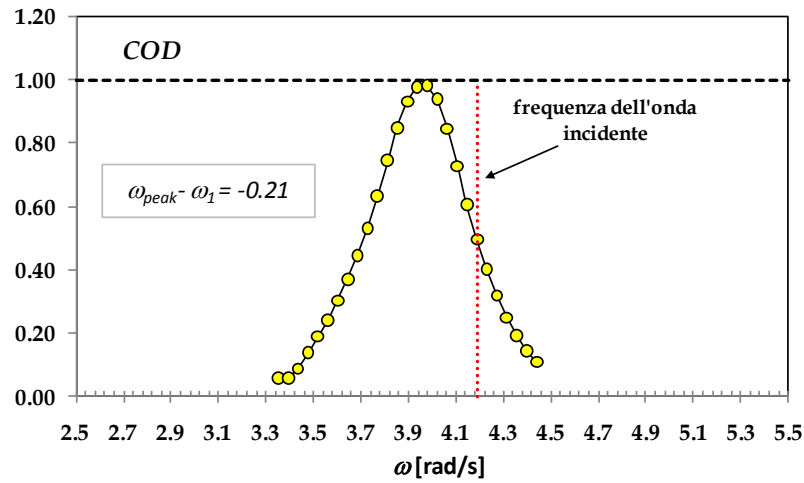


Figura 5.9. Andamento di  $COD$  al variare di  $\omega_1$  [Struttura 2 ;  $H_i=4cm$  e  $T=1.5s$ ]

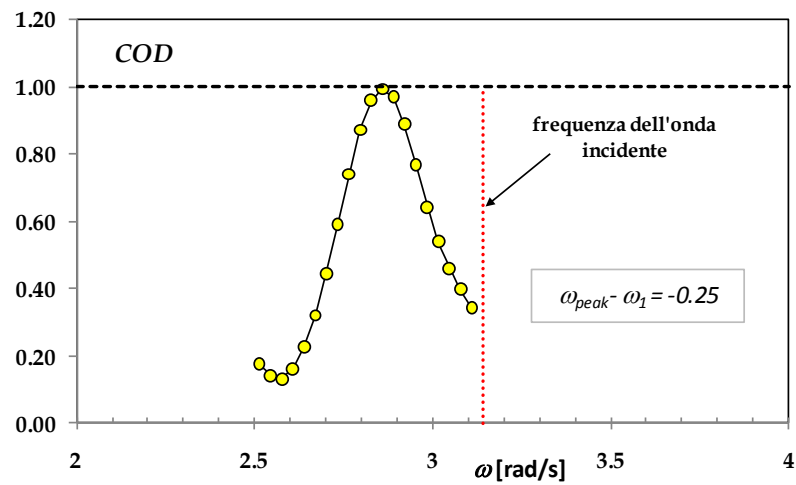


Figura 5.10. Andamento di  $COD$  al variare di  $\omega_1$  [Struttura 2 ;  $H_i=5cm$  e  $T=2s$ ]

A questo punto, conosciuta la frequenza  $\omega_1$ , il sistema [5.18] è stato applicato in via definitiva per il calcolo delle [5.21] e [5.22].

## Capitolo 6. Analisi dei dati sperimentali

### 6.1 Generalità

Il presente capitolo è dedicato alla discussione dettagliata dei risultati sperimentali conseguiti nell'ambito di questo lavoro di tesi. Esso è strutturato in due parti distinte.

Nella prima si darà conto e si discuterà del carattere non permanente del moto ondoso trasmesso nel dominio del tempo e delle caratteristiche oscillazioni delle componenti di Fourier nell'area protetta; queste ultime sono attribuibili alla contemporanea presenza nel campo d'onda a tergo della barriera di componenti armoniche libere e legate in fase, le cui caratteristiche (ampiezze e costante di fase) saranno stimate a partire dalle misure sperimentali effettuate.

La seconda parte è invece dedicata ai possibili legami esistenti tra la risposta idraulica della struttura, soprattutto nel dominio delle frequenze (ampiezza delle diverse componenti armoniche in gioco), ed i caratteri macroscopici dell'interazione onda-struttura, vale a dire occorrenza, tipologia ed estensione di frangimento.

### 6.2 Analisi della trasmissione nel dominio del tempo

Come più volte sottolineato, durante le indagini sperimentali il processo di oscillazione della superficie libera è stato registrato in 15 o 20 posizioni differenti all'interno del canale; le misure sono state ripetute identicamente in presenza ed in assenza dei modelli di struttura. Ciò ha permesso di confrontare direttamente le caratteristiche del moto ondoso incidente e quelle del moto ondoso trasmesso, sia per onda frangente che per onda non frangente.

I grafici proposti di seguito, i quali rappresentano soltanto una parte della totalità dei casi sperimentali indagati, mostrano chiaramente la non linearità della risposta strutturale nel dominio del tempo, documentando altresì la caratteristica presenza di creste secondarie nel profilo di pelo libero.

La Figura 6.1 si riferisce ad un test condotto con  $H_i=3cm$  e  $T=1s$ ; il grafico riporta, per identiche posizioni, il profilo dell'onda in assenza (a sinistra) ed in presenza (a destra) di una struttura nucleata a coronamento largo ( $B=80cm$ ) e sommergezza  $R_c=6.5cm$ . Per questo esperimento non si è riscontrato frangimento dell'onda sull'opera. Al contrario, un esempio di campo d'onda trasmesso in presenza di frangimento sulla struttura è mostrato in Figura 6.2; il grafico si riferisce ad un attacco ondoso con  $H_i=8cm$  e  $T=1s$  e alla identica geometria strutturale.

Risulta immediatamente che mentre il profilo in assenza di struttura si mantiene di forma pressoché costante lungo il canale, in presenza dell'opera esso muta da posizione a posizione, proprio a causa della presenza di disturbi che si propagano con una celerità indipendente rispetto alla componente principale.

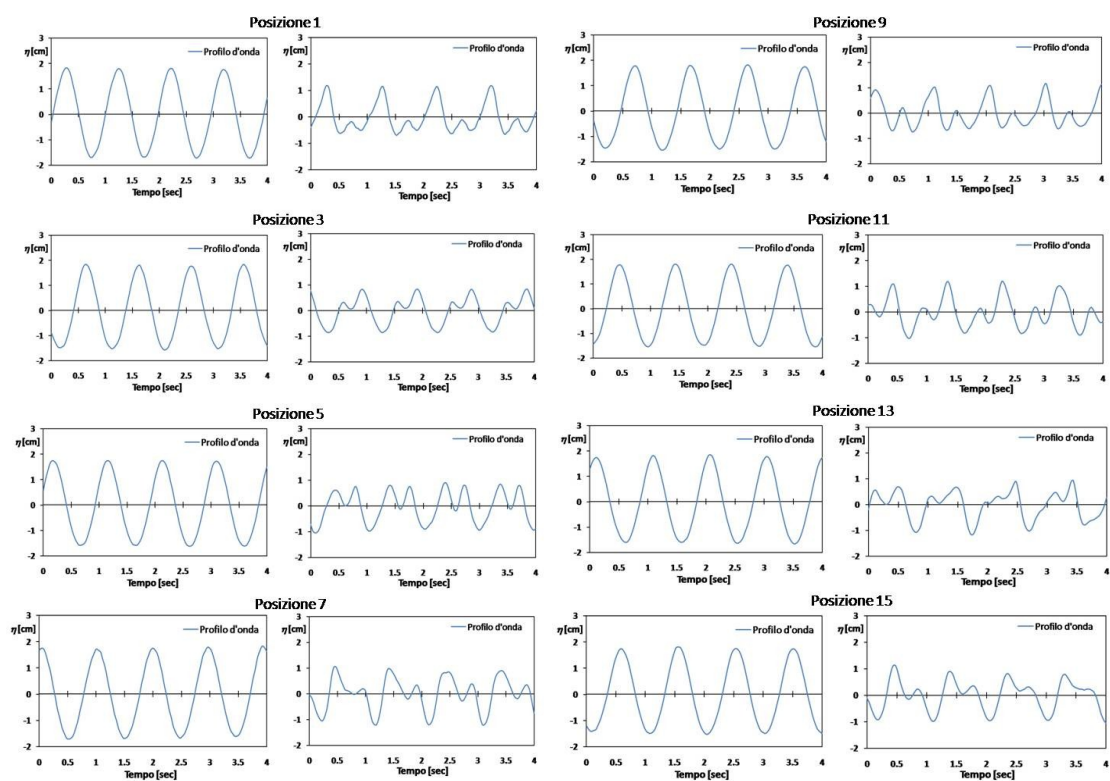


Figura 6.1. Confronto tra moto ondoso incidente e trasmesso nel dominio del tempo  
[Struttura 1 -  $h = 27.6\text{ cm}$  ;  $H_i = 3\text{ cm}$  ;  $T = 1\text{ s}$ ].

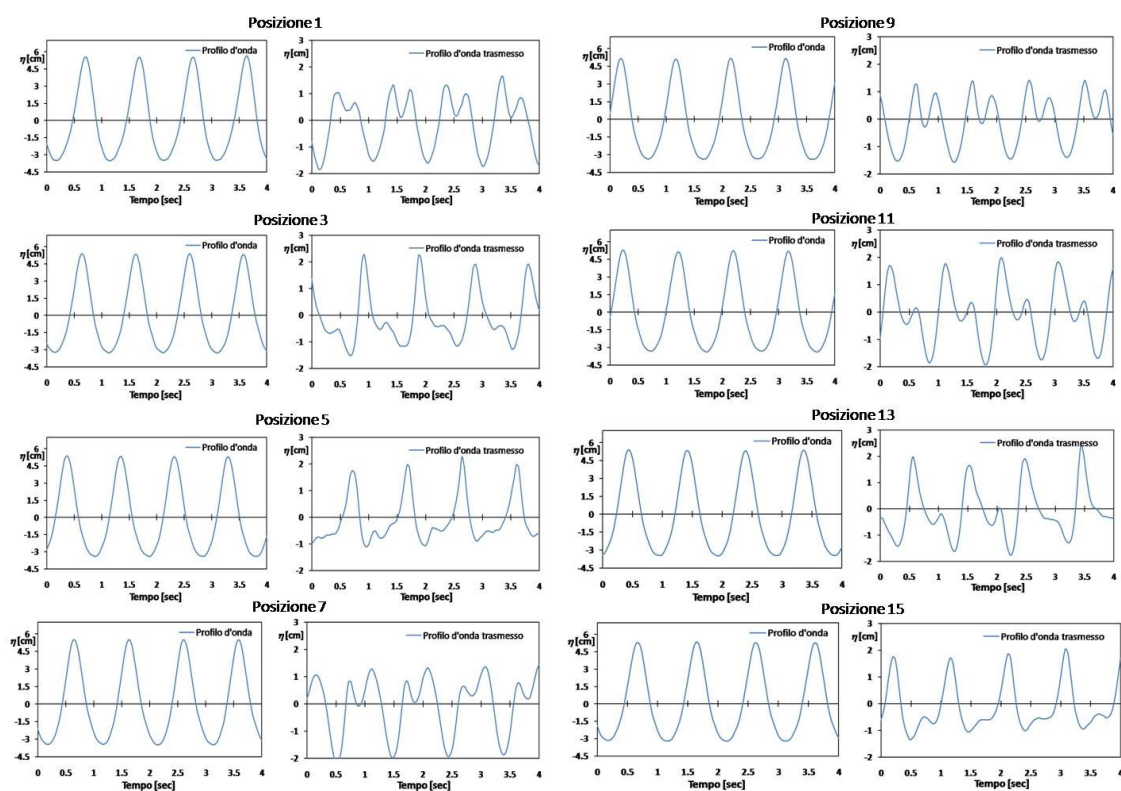


Figura 6.2. Confronto tra moto ondoso incidente e trasmesso nel dominio del tempo  
[Struttura 1 -  $h = 27.6\text{ cm}$  ;  $H_i = 8\text{ cm}$  ;  $T = 1\text{ s}$ ].

Come già sottolineato in precedenza, l'aspetto più interessante è senz'altro la presenza di una cresta d'onda secondaria nel profilo. Contrariamente a quanto previsto dalla teoria di Stokes, dove la presenza di tali creste può verificarsi solo in maniera permanente nel cavo, esse appaiono qui mutare la loro posizione relativa all'onda principale testimoniando, di fatto, un legame con le componenti super-armoniche libere. Si nota, inoltre, una certa ritmicità nelle forme d'onda rilevate.

Questi aspetti possono essere efficacemente studiati mediante i coefficienti di asimmetria del profilo ( $\eta$ ) e della sua derivata temporale ( $\eta_t$ ), che rappresentano due tipici indicatori di forma. Essi sono conosciuti in letteratura (Yamashiro et al., 1999) rispettivamente come coefficiente di *skewness* [ $C_s$ ] e di *atiltness* [ $C_a$ ], e possono essere definiti come:

$$C_s = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2}} \right)^3 dt \quad [6.1]$$

$$C_a = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\eta_t}{\sqrt{\eta_t^2}} \right)^3 dt \quad [6.2]$$

Il coefficiente di Equazione [6.1] regola l'asimmetria cresta-cavo rispetto ad un asse orizzontale. Per un'onda di Stokes del II ordine, caratterizzata da un profilo permanente con creste appuntite e cavi piatti, tale valore è costante e positivo e vale:

$$C_s = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{a^2 a_B^{(2)}}{\left[ a^2 + \left( a_B^{(2)} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad [6.3]$$

in cui  $a$  ed  $a_B^{(2)}$  sono le ampiezze delle componenti stokiane.

Il coefficiente espresso dalla [6.2] descrive, invece, l'asimmetria del profilo rispetto ad un asse verticale passante per la cresta; per un'onda di Stokes esso è costantemente nullo.

Le due quantità appena introdotte sembrerebbero avere rilevanza nei confronti dei processi di trasporto solido trasversale ("*cross-shore*"), influenzando così la direzione prevalente del flusso sedimentario potenziale nell'area protetta. La corrispondenza (teorica) tra coefficienti di forma e direzione prevalente del trasporto solido "*cross-shore*" è sintetizzato nella Figura 6.3, ripresa direttamente dal lavoro di Yamashiro et al. (1999).

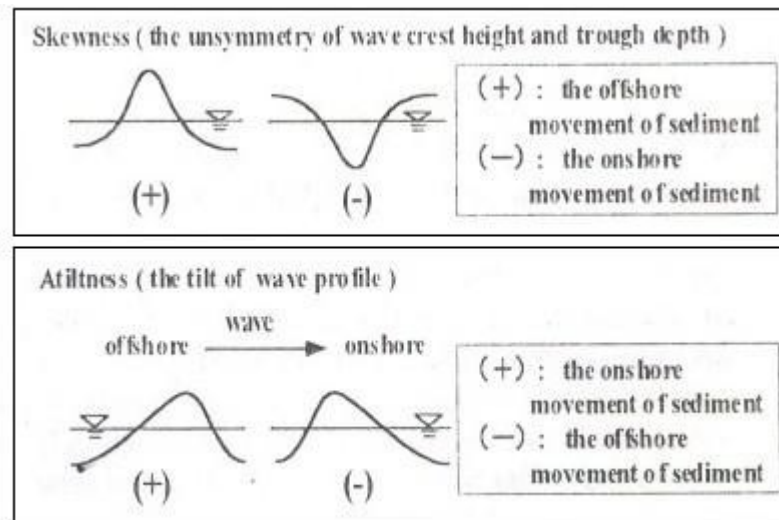


Figura 6.3. Influenza dei coefficienti di forma sul trasporto solido “cross shore”; Yamashiro et al,( 1999).

In realtà gli Autori hanno presentato la Figura 6.3 facendo riferimento ad un lavoro di Ono et al. (1998) che, essendo stato scritto in lingua giapponese, non è stato possibile consultare.

D'altra parte è facile comprendere che, se si fissa la media del profilo uguale a zero, una asimmetria cresta-cavo positiva (come nel caso dell' onda di Stokes) corrisponde al fatto che, in un periodo, la velocità orizzontale si mantiene negativa (off-shore) per più tempo di quanto non permanga su valori positivi (in-shore). Il discorso riguardo il coefficiente di *atiltness* è meno immediato ed è legato ad una maggiore o minore persistenza delle accelerazioni; un valore positivo della *atiltness*, infatti, indicherà una maggiore persistenza delle accelerazioni negative e così il passaggio tra il valore massimo della velocità on-shore e quello off-shore avviene lentamente con effetto netto di *drift* verso costa.

Tornando adesso agli esperimenti qui discussi, le Figure 6.4 e 6.5 mostrano un tipico esempio degli andamenti rilevati dei coefficienti di forma, in assenza ed in presenza di struttura.

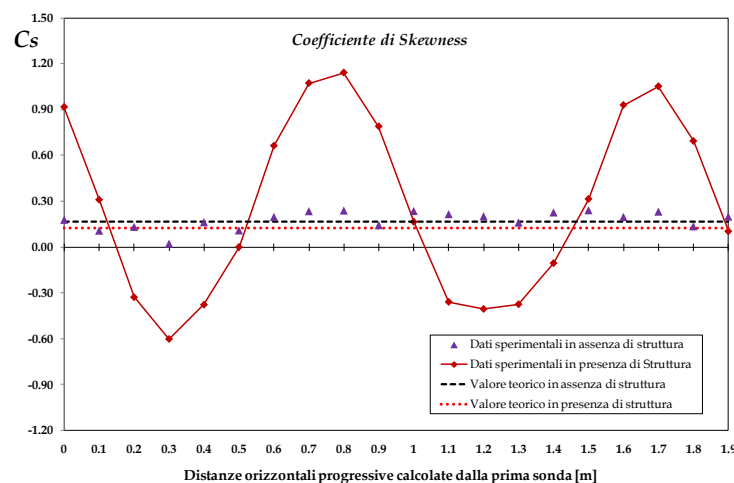


Figura 6.4. Andamento del coefficiente di *Skewness* per onda incidente e trasmessa; [Struttura 3 -  $h = 31.5\text{cm}$  ;  $H_i = 4\text{cm}$  ;  $T = 1\text{s}$ ].



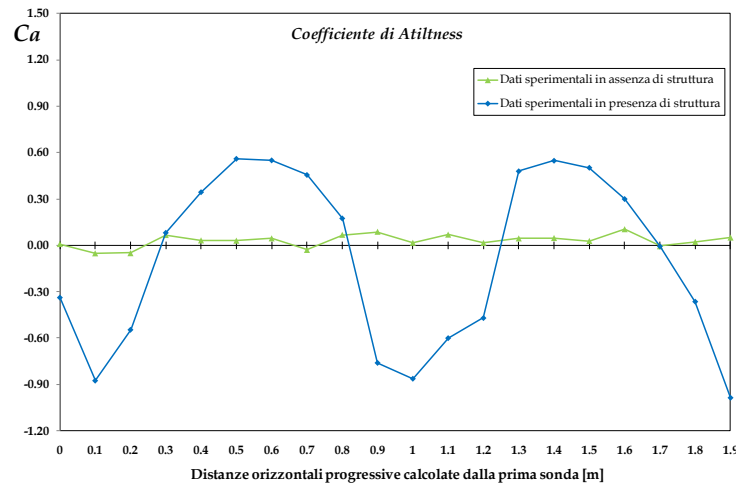


Figura 6.5. Andamento del coefficiente di *Atiltness* per onda incidente e trasmessa; [Struttura 3 -  $h = 31.5\text{cm}$  ;  $H_i = 4\text{cm}$  ;  $T = 1\text{s}$ ].

Le Figure 6.1 e 6.2 mostrano chiaramente che la forma dell'onda incidente si mantiene pressoché invariata; tale fatto è confermato dagli andamenti sia del coefficiente di *skewness* (Figura 6.4), che permane costante e positivo, sia del coefficiente di *atiltness* (Figura 6.5), il quale è ovunque pressappoco nullo. Si noti che i valori rilevati del coefficiente di asimmetria cresta-cavo in assenza di struttura sono molto bene interpretati dalla Equazione [6.3], che è rappresentata nel grafico mediante un segmento tratteggiato.

Ben diverso è invece l'andamento in presenza di struttura; in tal caso i coefficienti oscillano periodicamente intorno ai valori teorici di onda permanente, vale a dire l'Equazione [6.3] per la *skewness* (segmento in rosso in figura) e zero per l'*atiltness*.

L'andamento oscillante dei coefficienti di forma nell'area protetta era già stato osservato da Yamashiro et al. (1999) e su questo aspetto si tornerà più dettagliatamente nel seguito di questo paragrafo.

L'analisi congiunta dell'andamento dei due coefficienti può essere ora utilmente adoperato per interpretare le variazioni di forma subite dal profilo trasmesso e già osservate nelle Figure 6.1 e 6.2. Si consideri, dunque, la Figura 6.6, che si riferisce ad un esperimento condotto con un modello di struttura a cresta stretta ( $B=25\text{cm}$ ) e sommergezza  $R_c=6.5\text{cm}$ ; i parametri ondosi sono  $H_i=4\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$ . Anche in questo caso si riscontra un'oscillazione spaziale periodica dei coefficienti di asimmetria, cui corrisponderà evidentemente un'analogia fluttuazione periodica della forma d'onda. A tal proposito è utile innanzitutto sottolineare che l'andamento dei due coefficienti sembra caratterizzato dalla stessa lunghezza d'onda e da una differenza di fase iniziale di circa  $\pi/2$ .

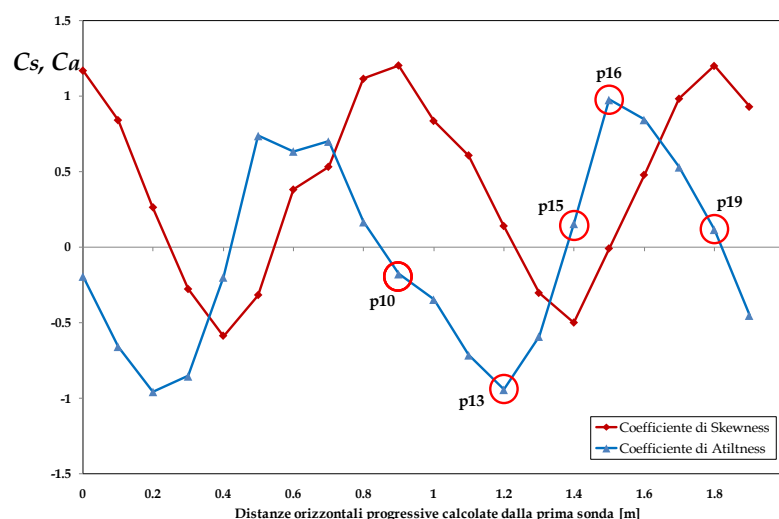


Figura 6.6. Variazione spaziale dei coefficienti di forma  $C_s$  e  $C_a$ .  
[Struttura 2 -  $h = 31.5\text{cm}$  ;  $H_i = 4\text{cm}$  ;  $T = 1\text{s}$ ].

Nel grafico sono stati inoltre evidenziati, con dei circoletti rossi, i valori attinti dai due indici in corrispondenza di alcune sezioni del canale che posso ritenersi rilevanti per i nostri scopi, ed in particolare nei riguardi della transizione della cresta secondaria sul profilo principale.

Nella posizione 10 ( $p10$ )  $C_a$  è con buona approssimazione nullo, mentre  $C_s$  assume un valore massimo positivo. In tale situazione si può ritenere che il profilo d'onda possa essere molto vicino a quello di un'onda di Stokes, simmetrica rispetto ad un piano verticale e con creste più elevate di quanto siano approfonditi i cavi. Tale ipotesi è confermata dalla Figura 6.7a in cui è possibile riconoscere la presenza di una cresta secondaria nel cavo dell'onda proprio come accade nella teoria di Stokes II quando  $a_B^{(2)}/a^{(1)} > 0.25$ . Spostandoci lungo il canale, secondo il verso di propagazione dell'onda, nella posizione 13 osserviamo che  $C_s$  assume valore nullo, mentre  $C_a$  attinge un massimo negativo; la Figura 6.7b evidenzia così un profilo simmetrico rispetto al piano orizzontale, con presenza di una cresta secondaria sul fronte interno dell'onda ( $C_a$  è negativo); in pratica il disturbo sta ora risalendo il profilo principale dal cavo verso la cresta. Nella posizione 15  $C_a$  è nullo, mentre  $C_s$  attinge un massimo negativo. Di conseguenza il profilo d'onda è simmetrico rispetto al piano verticale (Figura 6.7c) con cavi più approfonditi delle creste; in corrispondenza di queste ultime è ora evidente la presenza del disturbo secondario. In sostanza quando la cresta secondaria si trova nei punti di stazionarietà del profilo principale, il pelo libero diviene simmetrico rispetto all'asse verticale e  $C_a$  si annulla; in corrispondenza dello zero "down-crossing" dell'onda di atiltness ( $p10$ ) la cresta secondaria si trova in cavo, mentre in corrispondenza dello zero "up-crossing" esso si trova in cresta. La posizione 16 vede il coefficiente  $C_s$  nullo e  $C_a$  con massimo positivo; la forma del profilo (Figura 6.7d) sarà analoga a quella di Figura 6.7b presentando però la cresta secondaria sul fronte d'onda esterno, in fase discendente ( $C_a$  positivo). In pratica l'ubicazione della cresta secondaria ai lati del profilo principale rende quest'ultimo simmetrico nel senso cresta-cavo ed il profilo di  $C_a$  si annulla. In corrispondenza dello zero "down-crossing" dell'onda di skewness ( $p13$ ) la cresta secondaria anticipa quella principale mentre, in

corrispondenza dello zero “up-crossing” il disturbo secondario segue il picco dell’onda principale. È presumibile che, qualora l’ampiezza della prima super-armonica libera fosse significativamente inferiore a quella della fondamentale, le creste secondarie tenderebbero a scomparire in corrispondenza degli zeri della asimmetria (o meglio intorno ad essi), cui corrispondono i picchi della *atiltness*. Infine, nella posizione *p19* si completa un ciclo delle due fluttuazioni ed il profilo rappresentato in Figura 6.7e presenta una forma simile a quella riportata in Figura 6.7a.

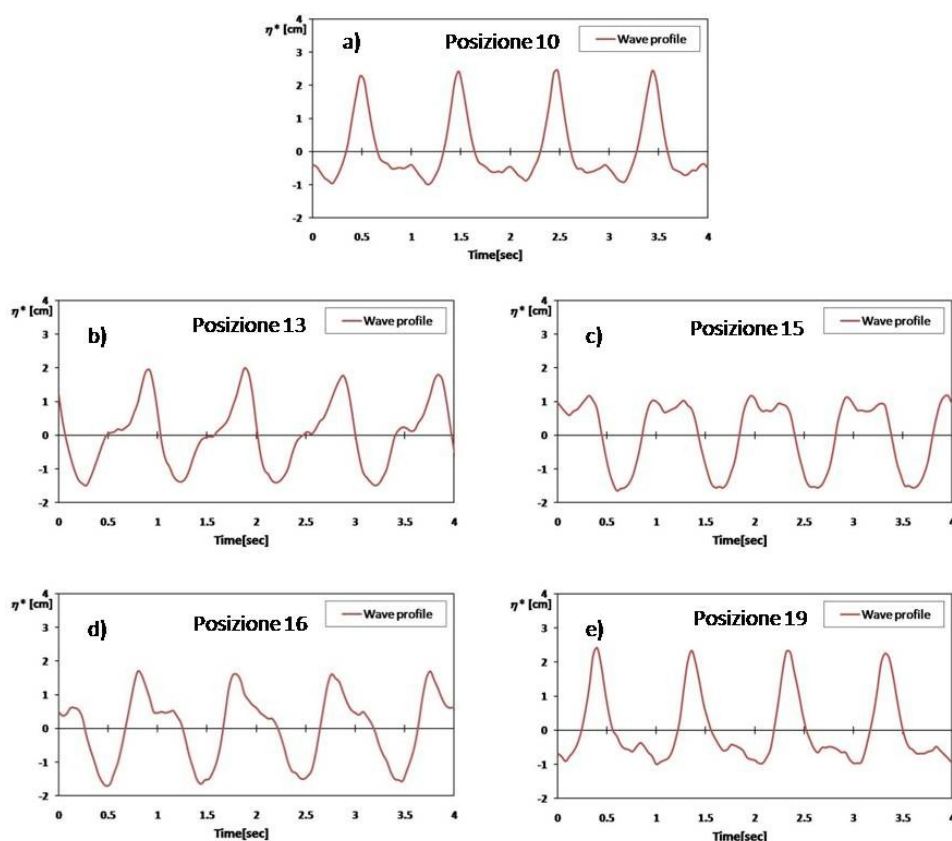


Figura 6.7. Profili d’onda standardizzati registrati in corrispondenza delle posizioni evidenziate in Figura 6.8.

Come già accennato in precedenza, la fluttuazione periodica dei coefficienti di forma era già stata osservata da Yamashiro et al. (1999) di cui si riporta la Figura 12a nel grafico 6.8. Coerentemente con quanto appena discusso, gli Autori notarono che: “skewness and atiltness change periodically along wave tank due to the spatial change of the relative phase between the fundamental frequency component and second order component [...]”. In effetti quanto descritto nelle Figure 6.5-6.7 può essere allo stesso tempo considerata una conferma ed un approfondimento della frase precedente, brevemente enunciata dagli Autori al termine del loro lavoro.

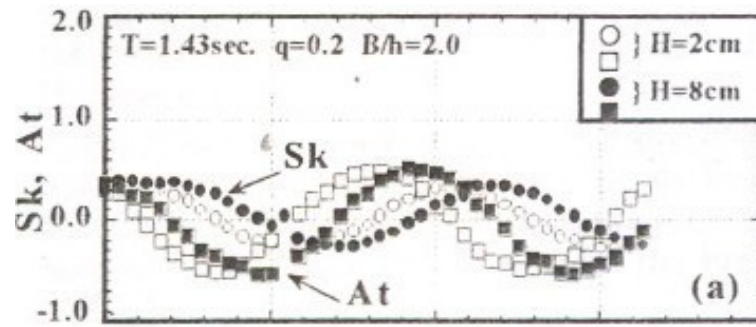


Figura 6.8. Fluttuazione periodica dei coefficienti di forma da Yamashiro et al. (1999)

Nel corso dello stesso commento Yamashiro et al. (1999) notarono inoltre che: *“the profile of the distribution of skewness and atiltness for the larger wave height H=8cm slightly shift on shoreward compared to the profiles for H=2cm because the disturbance caused by wave breaking on the breakwater extends on shoreward on the increase of the incident wave height”*.

In effetti per un'assegnata struttura, la traslazione in avanti del profilo di oscillazione della asimmetria al crescere dell'altezza d'onda incidente è stato notato anche in questo lavoro. Le Figure 6.9-6.10 riportano, al variare delle altezze d'onda incidenti, le fluttuazione del coefficiente di asimmetria standardizzato:

$$C_s^* = \frac{C_s - \mu_{C_s}}{\sigma_{C_s}} \quad [6.4]$$

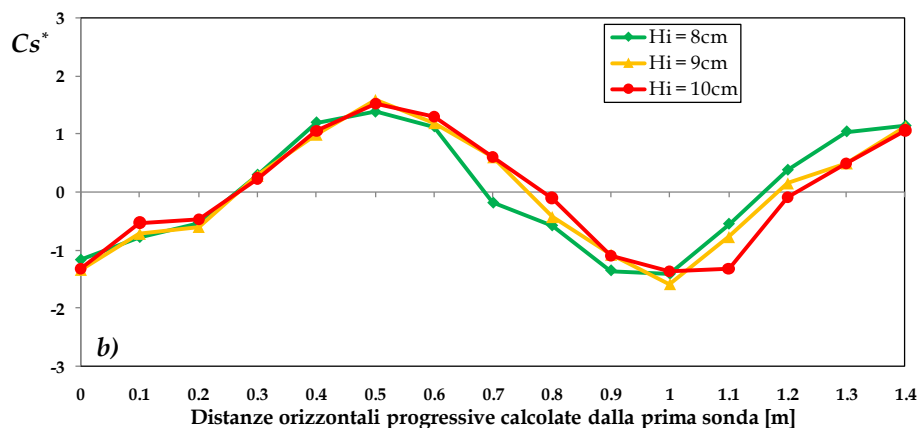
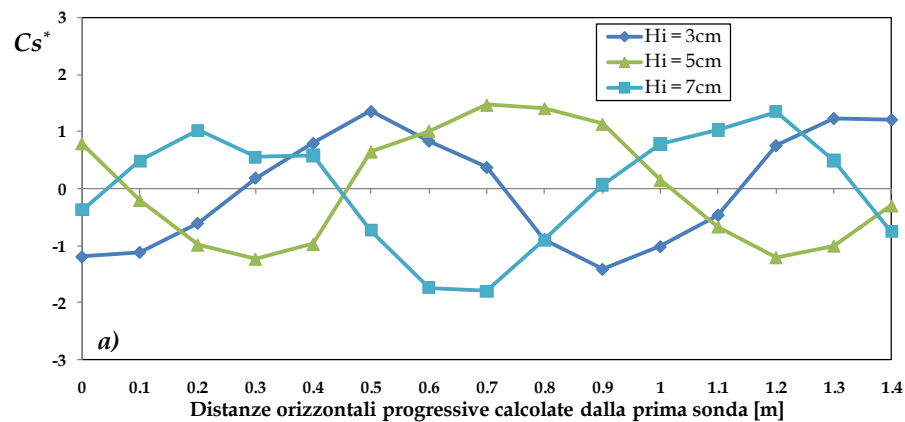


Figura 6.9. Traslazione del profilo di oscillazione di  $C_s^*$  ; [Struttura 1; B=80cm ; Rc=6.5cm, T=1s].

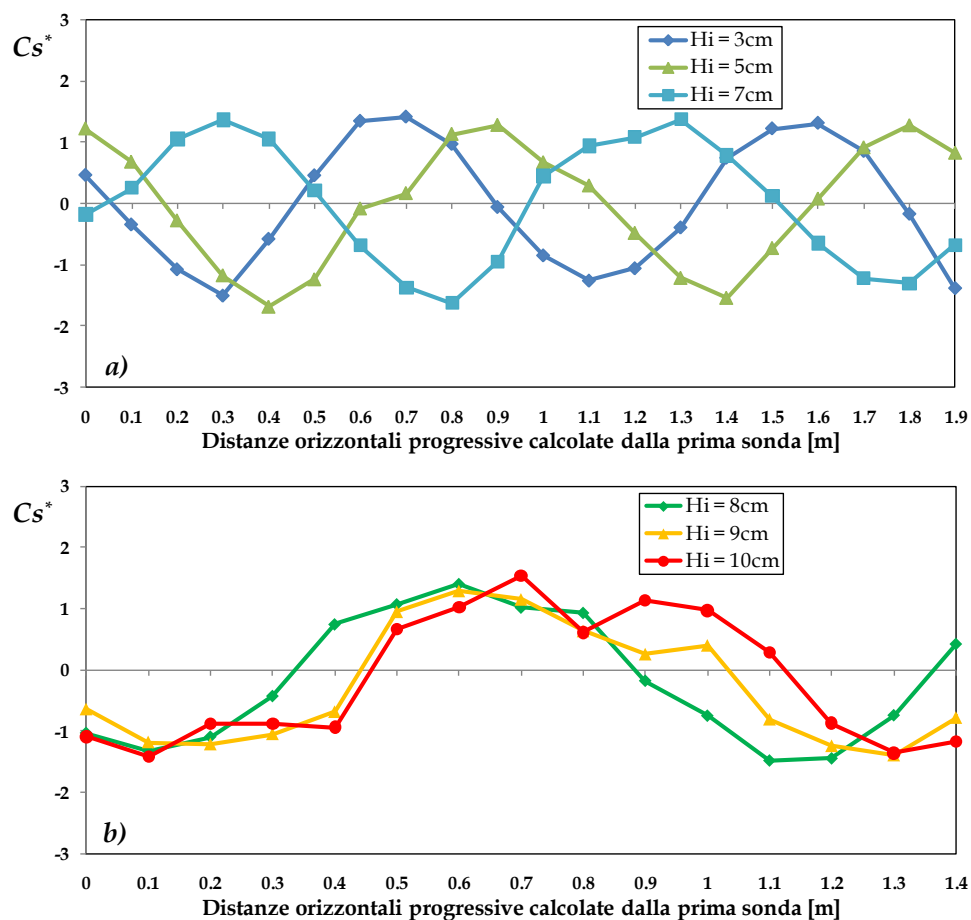


Figura 6.10. Traslazione del profilo di oscillazione di  $C_s^*$  ; [Struttura 2;  $B=25\text{cm}$  ;  $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $T=1\text{s}$ ].

Sembrerebbe tuttavia esistere una zona, nella quale i frangimenti divengono più intensi, in cui l'effetto della progressiva traslazione del profilo di oscillazione sembra rallentare (Figure 6.9b e 6.10b). Ciò è particolarmente evidente nel caso di struttura lunga, con nucleo e sommergenza elevata (Struttura 1 -  $R_c = 6.5\text{cm}$ ).

Volendo ulteriormente approfondire l'indagine su questo aspetto è possibile notare, dalle Figure 6.11 e 6.12, che anche la variazione dell'ampiezza del coronamento e la profondità di sommergenza determinano effetti analoghi.

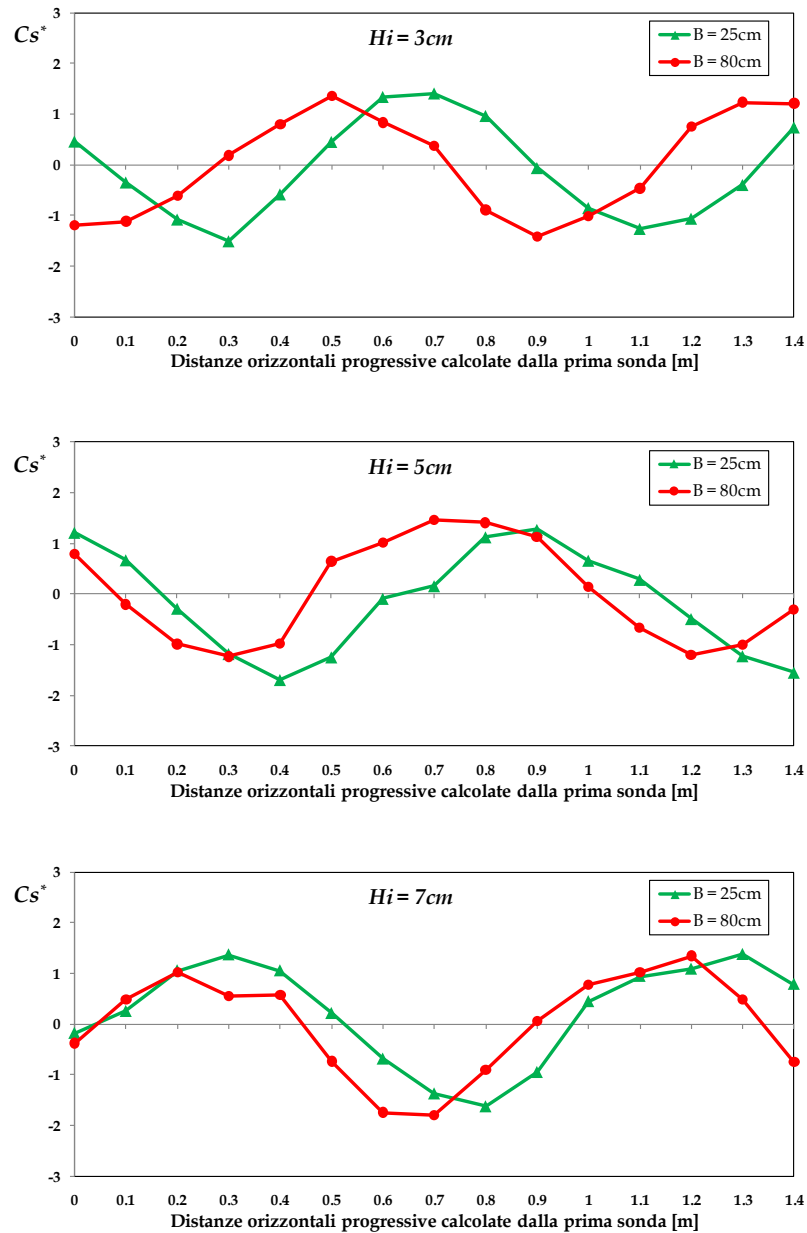


Figura 6.11. Influenza di  $B$  sul profilo di oscillazione di  $C_s^*$ ; [ $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $T=1\text{s}$ ].

La Figura 6.11 documenta che per le strutture con coronamento ridotto ( $B=25\text{cm}$ ), la fluttuazione dell'asimmetria risulta leggermente traslata nella direzione di propagazione dell'onda, mostrando comunque un'influenza meno marcata di quella riscontrata nelle Figure 6.9a e 6.10a; anche in questo caso tale effetto sembra ridursi con l'aumentare dell'altezza d'onda incidente.

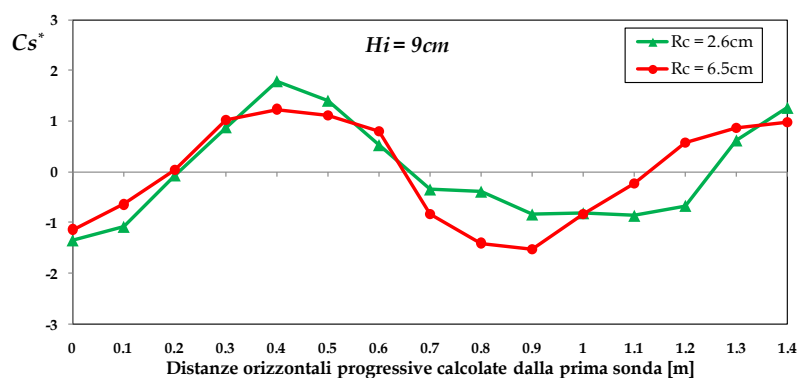
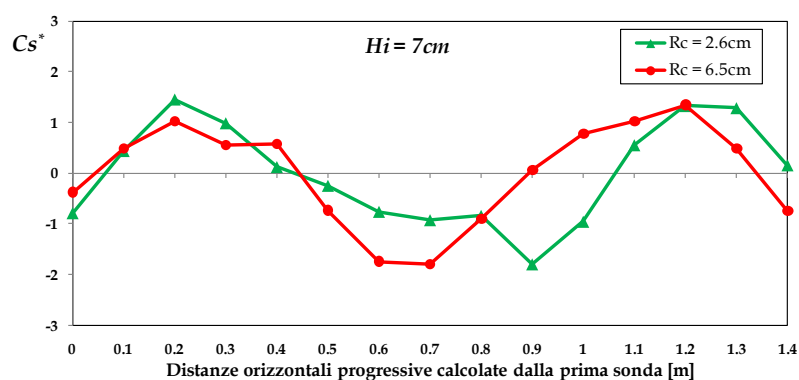
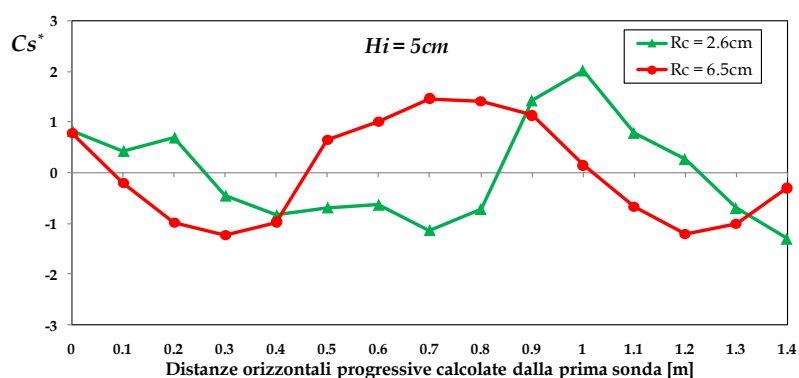
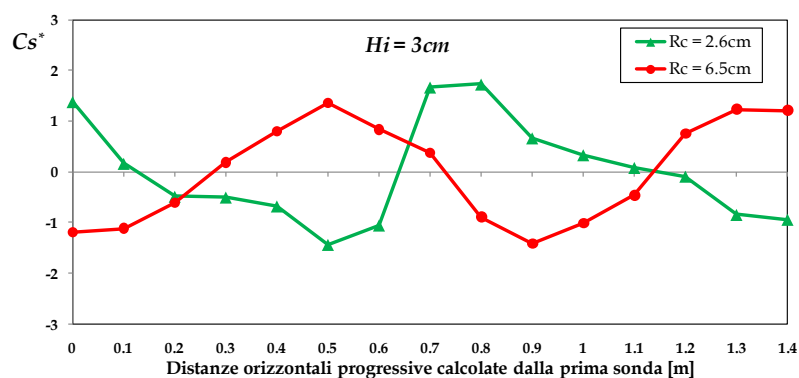


Figura 6.12. Influenza di  $Rc$  sul profilo di oscillazione di  $C_s^*$  ; [ $B=80cm$ ,  $T=1s$ ].

Il profilo di oscillazione dell'asimmetria sembra essere influenzato anche dal livello di sommergenza (Figura 6.12). Per altezze d'onda piccole, le fluttuazioni di  $C_s^*$  per strutture poco sommerse sono chiaramente anticipate rispetto a quelle riferite alle configurazioni analoghe con sommergenze maggiori. Per le altezze d'onda incidenti più grandi le traslazioni sembrano ancora ridursi, indicando l'esistenza di una sorta di livello di saturazione.

Sebbene la natura delle oscillazioni dei coefficienti di forma sia stata già spiegata qualitativamente per diverse vie, essa può essere provata quantitativamente ed in maniera più stringente mediante le Figure 6.13 e 6.14.

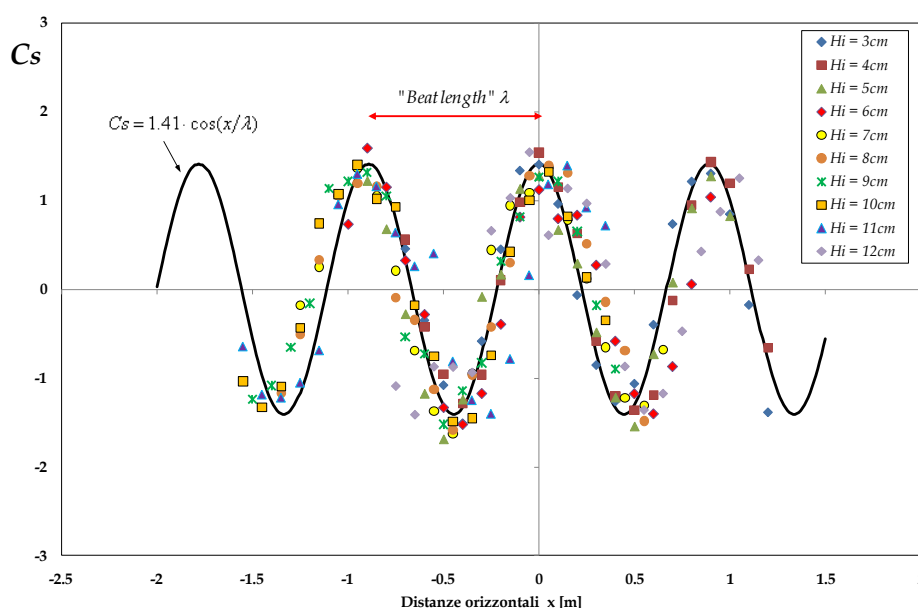


Figura 6.13. Fluttuazione di  $C_s^*$  per tutti i test eseguiti in presenza di struttura nucleata con  $B=25\text{cm}$  ed  $R_c=6.5\text{cm}$ .

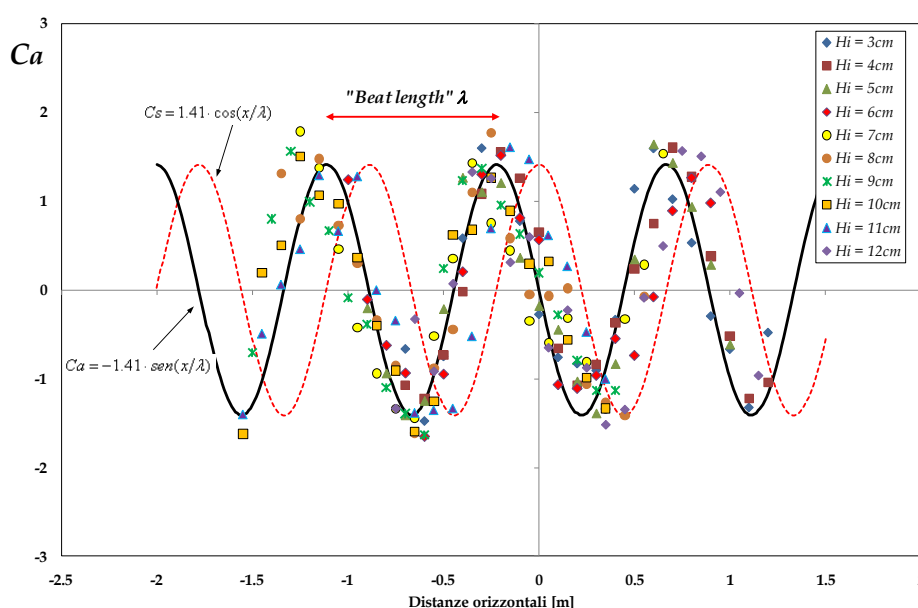


Figura 6.14. Fluttuazione di  $C_a^*$  per tutti i test eseguiti in presenza di struttura nucleata con  $B=25\text{cm}$  ed  $R_c=6.5\text{cm}$ .



Qui, con riferimento alla configurazione strutturale con coronamento stretto ( $B=25\text{cm}$ ) e sommergezza elevata ( $R_c=6.5\text{cm}$ ), i profili di oscillazione standardizzati degli indici di asimmetria sono stati mutuamente traslati in maniera da annullare approssimativamente i differenziali di fase. Si nota dai grafici che i dati relativi a  $C_s$  sono ben approssimati da una semplice cosinusoide di lunghezza d'onda pari a  $\lambda = \pi/(0.5k_2 - k_1)$  ovvero il *beat length* conseguente all'interazione tra componenti libere e legate in fase rispetto all'oscillazione fondamentale. Inoltre, la legge di fluttuazione di  $C_a$  appare in anticipo di  $\pi/2$  rispetto a  $C_s$ ; questo era d'altra parte atteso essendo  $C_a$  approssimativamente la derivata di  $C_s$ .

Confrontando ora i risultati precedenti con lo schema generale di Figura 6.3, potremmo speculativamente tentare alcune considerazioni inerenti il trasporto solido trasversale nell'area protetta. Visto lo sfasamento tra le oscillazioni dei coefficienti di forma, risulta immediatamente dalla Figura 6.15 che esistono due zone (rispettivamente gli intervalli  $[\pi/2, \pi]$  e  $[3/2\pi, 2\pi]$ ) in cui non dovrebbe esistere una direzione preferenziale di trasporto solido potenziale poiché i due coefficienti presentano lo stesso segno. Nelle zone adiacenti, invece, dovrebbe esistere una direzione predominante del flusso sedimentario; ciò implica il determinarsi di una zona di accumulo, corrispondente alla zona neutra intermedia tra due zone "convergenti", ed una zona di escavo corrispondente alla zona neutra con flussi adiacenti "divergenti". Ne risulterebbero delle caratteristiche "ripples" con lunghezza d'onda pari a  $\lambda$ .

D'altra parte, però, è evidente che l'influenza dell'altezza d'onda nel coefficiente di fase iniziale delle oscillazioni (Figure 6.9a e 6.10a) provoca una traslazione delle zone di accumulo e di escavo che rendono probabilmente alquanto vago qualsiasi tentativo di previsione riguardo la risposta morfologica "cross-shore" del litorale protetto. A tal proposito la traslazione dei profili di oscillazione delle asimmetrie è più probabilmente dovuto ad una variazione del *lag* di fase iniziale tra le componenti ondose nell'area protetta piuttosto che agli effetti del frangimento postulati da Yamashiro et al. (1999); volendo d'altra parte collegare le due osservazioni potremmo supporre che l'ampliarsi della zona di "reforming" alteri progressivamente il differenziale di fase iniziale tra le armoniche.

In ogni caso, sulla base delle considerazioni svolte con l'aiuto della Figura 6.15, assume particolare rilievo la possibilità che, come suggerito dalle Figure 6.9b e 6.10b, esista un profilo di oscillazione limite che, associato a situazioni di intenso frangimento, potrebbe in realtà essere connesso ad una forma di stabilizzazione della zona di "reforming".

È infine necessario evidenziare che i ragionamenti sin qui svolti sono stati condotti unicamente per i dati relativi a  $T=1\text{s}$ . Per le onde più lunghe, infatti, la finestra spaziale di rilevamento investigata ( $\Delta x$ ) è significativamente inferiore alla lunghezza di ricorrenza  $\lambda$  (Tabella I) e ciò non consente di trarre alcuna conclusione di carattere generale. Appare ancor più necessario dunque svolgere ulteriori analisi adoperando canali ad onda di lunghezza rilevante.

Periodo $T$ [s]	$h$ [cm]	$\Delta x$ [cm]	$\lambda$ [cm]	$\lambda/\Delta x$
1.0	27.6	140	93.110	0.67
1.0	31.5	140	88.900	0.64
1.5	31.5	167	307.800	1.84
2.0	31.5	167	841.910	5.04

Tabella I. Quadro riassuntivo delle caratteristiche spaziali di rilevamento.

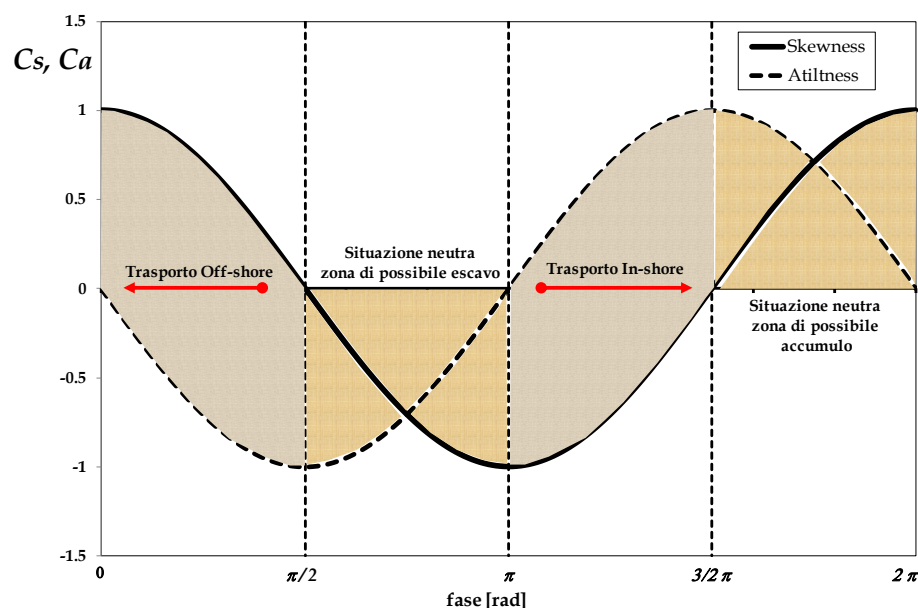


Figura 6.15. Sfasamento tra le funzioni di oscillazione dei coefficienti d asimmetria.

### 6.3 La fluttuazione spaziale delle componenti di Fourier

Le Figure 6.16 6.17 mostrano l'evoluzione dello spettro di potenza nell'area protetta, in presenza ed in assenza di struttura. Nei grafici la potenza associata all'ampiezza di pulsazione  $n\omega$  è espressa come:

$$P_{n\omega} = 0.5 \cdot (A_{n\omega})^2 \quad [6.5]$$

La Figura 6.16 si riferisce ad un attacco ondoso con  $H_i=7cm$  e  $T=1s$  mentre la 6.17 è associata ad un esperimento condotto con  $H_i=4cm$  e  $T=2s$ . Le due figure si riferiscono a configurazioni strutturali di barriere nucleate con coronamento stretto (Figura 6.16) e coronamento largo (Figura 6.17); entrambi gli esempi si riferiscono a condizioni di sommersa elevata ( $R_c=6.5cm$ ).

I grafici mostrano come in presenza di struttura la porzione di potenza dislocata in alta frequenza sia molto maggiore; inoltre vi è una evidente variazione spaziale dei picchi spettrali tanto che, nella posizione 8 e 12 di Figura 6.17, la terza componente di Fourier

finisce con il possedere una potenza maggiore della seconda. Evidentemente quest'ultimo fenomeno rappresenta semplicemente il corrispettivo nel dominio delle frequenze della fluttuazione del profilo ondoso nel dominio del tempo, ampiamente discussa, e sotto diversi punti di vista, nel corso del paragrafo precedente.

Proprio per sottolineare questo aspetto, nella Figura 6.18 viene proposto un confronto simultaneo tra le forme d'onda (risposta nel dominio del tempo) e gli spettri di potenza (risposta nel dominio delle frequenze); il grafico fa riferimento ad un test eseguito in presenza di barriera omogenea con coronamento stretto ( $B=25cm$ ) con un'onda di  $H_i=5cm$  e  $T=1s$ .

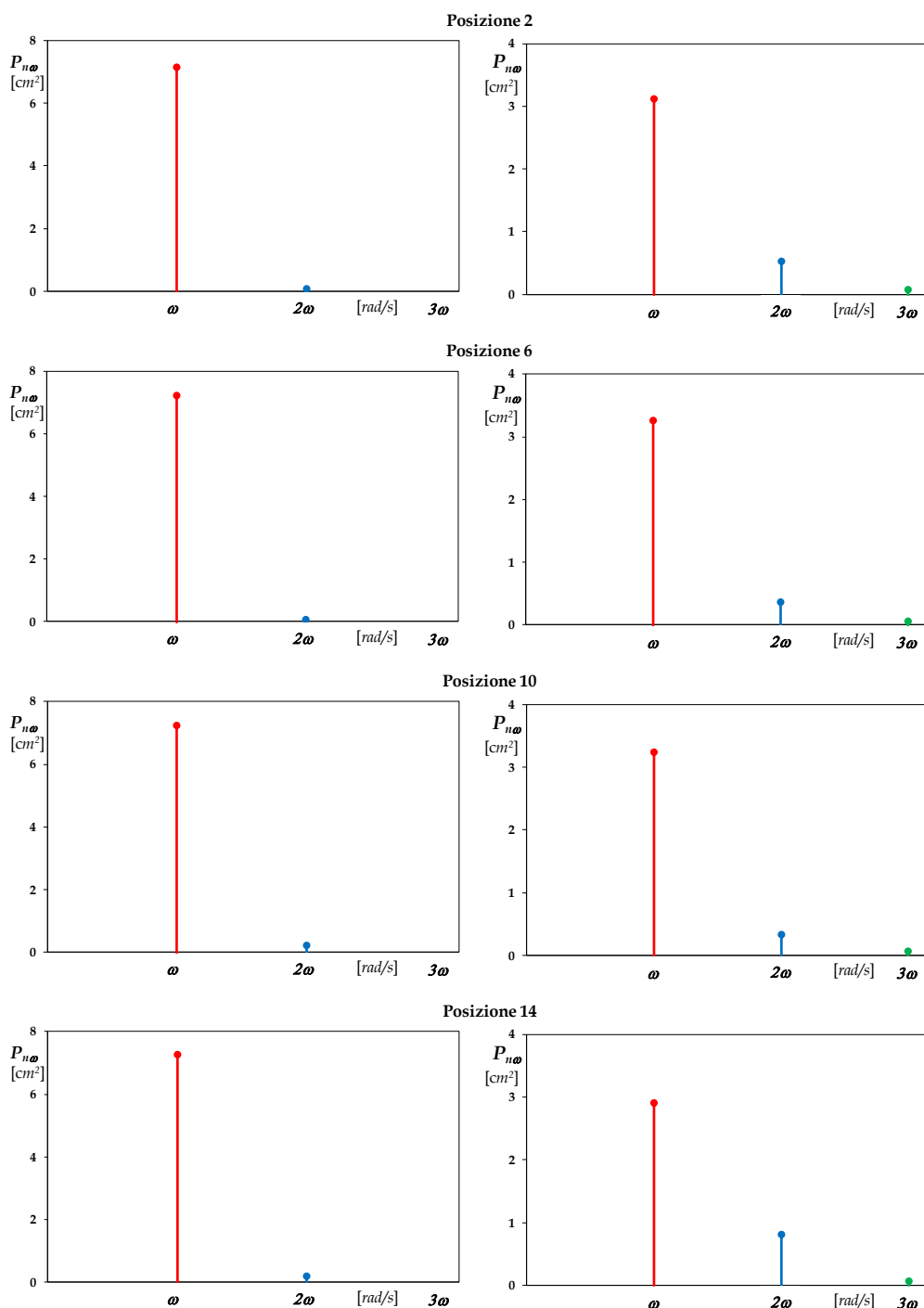


Figura 6.16. Evoluzione dello spettro di potenza nell'area protetta in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di struttura; [Struttura 2 -  $B=25cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ,  $H_i=7cm$ ,  $T=1s$ ].

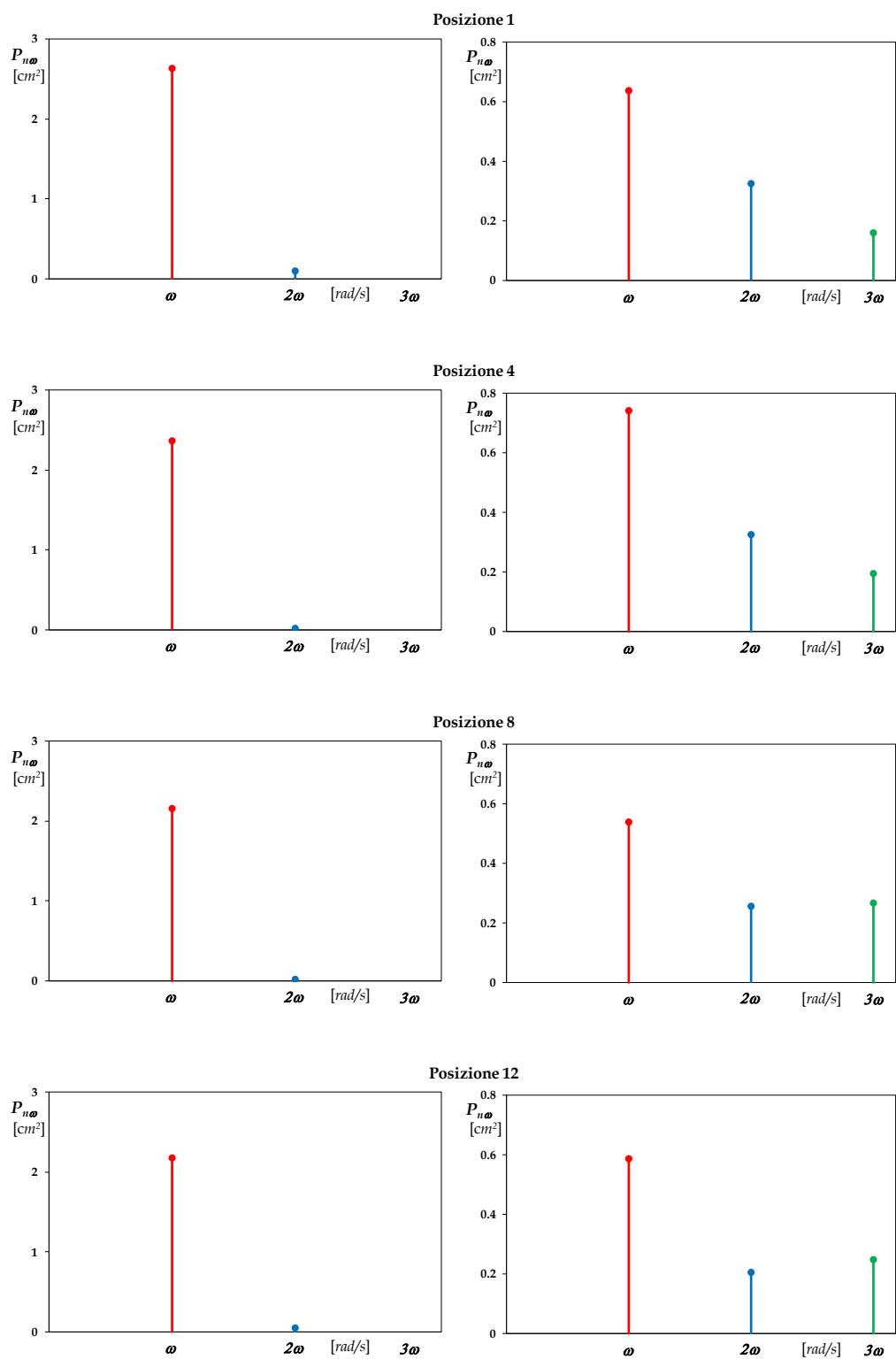


Figura 6.17. Evoluzione dello spettro di potenza nell'area protetta in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di struttura; [Struttura 1 -  $B=80cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ,  $H_i=4cm$ ,  $T=2s$ ].

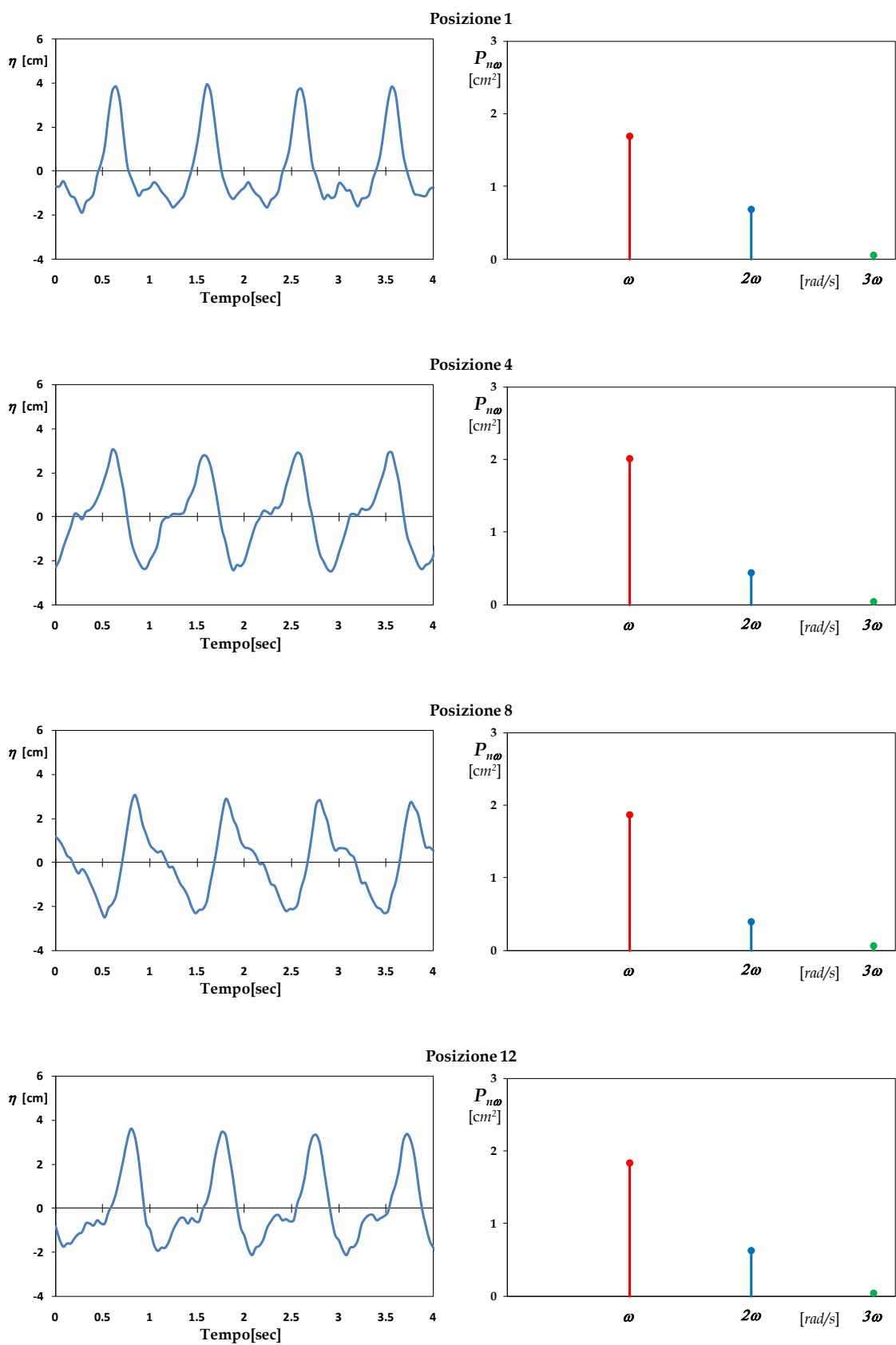


Figura 6.18. Confronto tra le forme d'onda (sinistra) e spettri di potenza (destra); [Struttura 3 -  $B=25\text{cm}$ ,  $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $H_i=5\text{cm}$ ,  $T=1\text{s}$ ].

Da un punto di vista più generale risulta ormai chiaro che la fluttuazione dei modi di Fourier, per un'assegnata frequenza, deriva dalla interazione di componenti armoniche di diversa natura, presenti nel moto ondoso trasmesso in corrispondenza di quella specifica pulsazione. Cosicché la ripetuta rilevazione dei profili in diverse posizioni nell'area protetta può essere adoperata per stimare ampiezza e fase delle diverse componenti in gioco.

La metodologia adoperata nel corso del lavoro di tesi, e descritta immediatamente di seguito, è stata dedotta in maniera pressoché rigorosa al secondo ordine di approssimazione e, solo in un secondo momento estesa al terzo ordine; ciò al fine di stimare le componenti caratteristiche in corrispondenza della terza armonica dello spettro (pulsazione  $3\omega$ ).

Molte delle relazioni dedotte di seguito sono state in realtà già introdotte nel corso dei capitoli precedenti, dove si è trattato della risposta non lineare dei generatori d'onda; esse vengono tuttavia qui riproposte in maniera sistematica per rendere più chiara la discussione.

### **6.3.1 Metodologia di stima al secondo ordine**

L'approccio al secondo ordine seguito nel corso del lavoro di tesi si compone delle seguenti fasi:

- per ciascuna frequenza di oscillazione si individuano le possibili componenti armoniche;
- di queste componenti armoniche si conservano solo quelle che nella espansione di Stokes posseggono un ordine non superiore al secondo;
- si ricava quindi la funzione di oscillazione risultante dalla interazione delle componenti principali di ordine inferiore;
- Questa funzione viene infine adattata ai dati sperimentali mediante un approccio ai minimi quadrati.

Poiché, come vedremo, le incognite da stimare sono in numero inferiore rispetto alle possibili equazioni (problema iperstatico), la procedura di stima viene affidata ad un approccio ai minimi quadrati, introducendo una funzione di disturbo nella quale si immagina confluiscono le fluttuazioni di ordine superiore insieme ad ogni altro "rumore", sia elettrico sia "statistico" (cioè legato alla procedura stessa di stima delle componenti di Fourier descritta nel Capitolo 5).

Come vedremo in seguito, in realtà questa procedura è comune a molti altri approcci adoperati nella tecnica di laboratorio; tra i più conosciuti vi sono infatti le procedure di calibrazione delle sonde, ma, soprattutto, di separazione dei campi incidenti e riflessi [Mansard e Funke (1980), Zelt e Skjelbreia (1992)].

### Funzione di oscillazione per la frequenza fondamentale ( $\omega$ )

Come già riferito in precedenza, le componenti armoniche teoricamente presenti dietro la struttura<sup>1</sup> in corrispondenza della pulsazione fondamentale sono:

- la componente dominante trasmessa  $a^{(1)}$ ;
- la componente legata derivante dalla teoria di Stokes del III ordine  $a_{B1}^{(3)}$ ;
- una componente retrograda riflessa che si associa all'onda stokiana;
- una componente di interferenza  $[a_{T1}^{(3)}]$  derivante dalla contemporanea presenza di componenti libere alle frequenze  $\omega$  e  $2\omega$ ;
- la componente riflessa, retrograda, associata all'onda di interferenza.

In termini matematici si ha:

$$\begin{aligned}\eta_{T\omega}(x, t) = & \left[ a^{(1)} + \frac{1}{2} (k_1 a^{(1)})^2 \cdot b_{11} \cdot a^{(1)} \right] \cdot \cos(\omega t - k_1 x + \varphi_1) + \\ & + K_{R\omega} \left[ a^{(1)} + \frac{1}{2} (k_1 a^{(1)})^2 \cdot b_{11} \cdot a^{(1)} \right] \cdot \cos(\omega t + k_1 x + \varphi_1) + a_{T1}^{(3)} \cdot \cos[\omega t - (k_2 - k_1)x + \alpha_{F2}] + \\ & + K_{RT\omega} \cdot a_{T1}^{(3)} \cdot \cos[\omega t + (k_2 - k_1)x + \varphi_{TR}] + o(a^4) \end{aligned} \quad [6.6]$$

In cui  $b_{11}$  è un fattore di proporzionalità introdotto da Goda (1998) (vedi relazioni [2.128] e [2.130] del Capitolo 2) che lega la componente dominante alla componente stokiana del III ordine,  $\varphi_1$  è la costante di fase iniziale riferita all'onda fondamentale,  $\alpha_{F2}$  è la differenza di fase iniziale tra l'onda di interferenza e l'onda fondamentale e  $\varphi_{TR}$  è la costante di fase riferita all'onda di interferenza retrograda;  $o(a^4)$  comprende tutti i termini trascurati nella rappresentazione [6.6] che è in realtà estesa al III ordine.  $K_{R\omega}$  e  $K_{RT\omega}$  sono i cosiddetti coefficienti di riflessione delle componenti rispettivamente stokiana e di interferenza. Si farà qui l'ipotesi che questi ultimi siano  $o(a)$ , o meglio  $o(k_1 a)$ .

In queste condizioni, il secondo termine nella prima parentesi quadra a destra dell'Equazione [6.6] è  $o(a^3)$  (lo è per definizione), il primo dei due addendi della componente riflessa fondamentale è  $o(a^2)$  ed il secondo  $o(a^4)$ . Ora, ricordando l'espressione di  $a_{T1}^{(3)}$  riportata nelle relazioni [2.88] e [2.128] si ricava che essa è di ordine  $o(a^3)$ , mentre  $K_{RT\omega} \cdot a_T$  è  $o(a^4)$ . Dunque, al II ordine di approssimazione si ha:

$$\eta_{T\omega}(x, t) = a^{(1)} \cdot \cos(\omega t - k_1 x + \varphi_1) + K_{R\omega} a^{(1)} \cdot \cos(\omega t + k_1 x + \varphi_1) + o(a^3) \quad [6.7]$$

<sup>1</sup> Si noti che di qui in avanti tutte le quantità indicate sono considerate "trasmesse" dietro la struttura (salvo specifiche indicazioni) omettendo il pedice "T" per snellire le notazioni formali delle equazioni che seguiranno.

Sviluppando mediante le formule di prostaferesi si ha:

$$\begin{aligned}\eta_{T\omega}(x, t) = & [a^{(1)} \cdot \cos(k_1 x - \varphi_1) + K_{R\omega} a^{(1)} \cdot \cos(k_1 x + \varphi_1)] \cdot \cos(\omega t) + \\ & + [a^{(1)} \cdot \sin(k_1 x - \varphi_1) - K_{R\omega} a^{(1)} \cdot \sin(k_1 x + \varphi_1)] \cdot \sin(\omega t) + o(a^3)\end{aligned}\quad [6.8]$$

L'Equazione [6.8] può scriversi in termini di ampiezza e fase di Fourier come:

$$\eta_{T\omega}(x, t) = A_\omega(x) \cdot \cos[\omega t + \phi_\omega(x)] + o(a^3) \quad [6.9]$$

con:

$$\begin{cases} A_\omega(x) \cdot \cos(\phi_\omega(x)) = [a^{(1)} \cdot \cos(k_1 x - \varphi_1) + K_{R\omega} a^{(1)} \cdot \cos(k_1 x + \varphi_1)] \\ -A_\omega(x) \cdot \sin(\phi_\omega(x)) = [a^{(1)} \cdot \sin(k_1 x - \varphi_1) - K_{R\omega} a^{(1)} \cdot \sin(k_1 x + \varphi_1)] \end{cases} \quad [6.10]$$

Quadrando e sommando i termini precedenti, ed estraendo successivamente la radice quadrata, si avrà:

$$|A_\omega(x)| = a^{(1)} \sqrt{1 + K_{R\omega}^2 + 2K_{R\omega} \cdot \cos[2k_1 x + \varepsilon]} \quad [6.11]$$

Dove  $\varepsilon = \varphi_R - \varphi_1$  rappresenta la differenza di fase iniziale tra la componente progressiva e quella retrograda.

In pratica l'Equazione [6.11] rappresenta la legge di fluttuazione della componente di Fourier di pulsazione  $\omega$ , nelle ipotesi precedentemente introdotte. Essa coincide ovviamente con la ben nota equazione di involuppo del moto ondoso quasi stazionario descritta ad esempio in Dean e Dalrymple (1991). La lunghezza d'onda della fluttuazione spaziale della componente [6.11] vale:

$$l = \frac{\pi}{k_1} \quad [6.12]$$

Per quanto riguarda la costante di fase della componente di Fourier si ha:

$$\cos\phi_\omega = \cos(\varphi_1 + \Delta\varphi_\omega) \quad [6.13]$$

con:

$$\begin{cases} \cos\Delta\varphi_\omega = \frac{a^{(1)}}{A_\omega} \cdot [\cos(k_1 x) + K_{R\omega} \cos(k_1 x + \varepsilon)] \\ \sin\Delta\varphi_\omega = \frac{a^{(1)}}{A_\omega} \cdot [K_{R\omega} \sin(k_1 x + \varepsilon) - \sin(k_1 x)] \end{cases} \quad [6.14]$$



Seguendo l'approccio precedentemente descritto l'Equazione [6.11] è stata adattata ai dati sperimentali stimando i valori incogniti  $a^{(1)}$ ,  $K_{R\omega}$  ed  $\varepsilon$  semplicemente minimizzando i quadrati degli scarti tra valori stimati e valori teorici. La procedura è identica a quella descritta nel corso del Paragrafo 5.3.2.

### Funzione di oscillazione per la frequenza $2\omega$

Seguendo gli stessi criteri descritti nel paragrafo precedente le componenti armoniche teoricamente da considerare per la prima super-armonica sono:

- L'armonica stokiana di  $o(a^2)$  legata in fase alla fondamentale  $a_B^{(2)}$  ;
- L'armonica libera di pulsazione  $2\omega$  generata dall'interazione non lineare onda-struttura  $a_F^{(2)}$ ;
- Le componenti riflesse associate alle precedenti.

Si ha così:

$$\eta_{2\omega} = a_B^{(2)} \cdot \cos(2k_1x - 2\omega t + 2\varphi_1) + K_{R\omega} a_B^{(2)} \cdot \cos(2k_1x - 2\omega t + 2\varphi_R) + \\ + a_F^{(2)} \cdot \cos(k_2x - 2\omega t + \varphi_{F2}) + K_{R2\omega} a_F^{(2)} \cdot \cos(k_2x - 2\omega t + \varphi_{F2} + \delta) + o(a^3) \quad [6.15]$$

in cui  $\varphi_R$  è la costante di fase iniziale della componente retrograda di Stokes del II ordine,  $K_{R\omega}$  è il coefficiente di riflessione delle onde stokiane principali, già incontrato precedentemente, e  $K_{R2\omega}$  è la analoga quantità per la prima superarmonica libera. Di quest'ultima  $\varphi_{F2}$  rappresenta la costante di fase iniziale, mentre  $\delta$  è il *lag* rispetto alla corrispondente componente riflessa. Il termine di resto, infine, è almeno dell'ordine ( $a^3$ ).

Introducendo ora le ipotesi:

$$\begin{cases} o(a_B^{(2)}) = o(a_F^{(2)}) = o(a^2) \\ o(K_{R\omega}) = o(K_{R2\omega}) = o(a) \end{cases} \quad [6.16]$$

si ha, arrestandoci al secondo ordine:

$$\eta_{2\omega} = a_B^{(2)} \cdot \cos(2k_1x - 2\omega t + 2\varphi_1) + a_F^{(2)} \cdot \cos(k_2x - 2\omega t + \varphi_{F2}) + o(a^3) \quad [6.17]$$

che si può anche scrivere nella forma:

$$\eta_{2\omega} = a_B^{(2)} \cdot \cos(2k_1x - 2\omega t + 2\varphi_1) + a_F^{(2)} \cdot \cos(k_2x - 2\omega t + 2\varphi_1 + \alpha_{F2}) + o(a^3) \quad [6.18]$$

essendo chiaramente:

$$\alpha_{F2} = \varphi_{F2} - 2\varphi_1 \quad [6.19]$$

Applicando adesso le consuete formule di prostaferesi si ottiene:

$$\begin{aligned} \eta_{2\omega} = & \left[ a_B^{(2)} \cdot \cos(2k_1x + 2\varphi_1) + a_F^{(2)} \cdot \cos(k_2x + 2\varphi_1 + \alpha_{F2}) \right] \cdot \cos(2\omega t) + \\ & + \left[ a_B^{(2)} \cdot \sin(2k_1x + 2\varphi_1) + a_F^{(2)} \cdot \sin(k_2x + 2\varphi_1 + \alpha_{F2}) \right] \cdot \sin(2\omega t) + o(a^3) \end{aligned} \quad [6.20]$$

cosicché si ha:

$$\eta_{2\omega} = A_{2\omega}(x) \cdot \cos[2\omega t + \phi_{2\omega}(x)] + o(a^3) \quad [6.21]$$

in cui:

$$\begin{cases} A_{2\omega}(x) \cdot \cos[\phi_{2\omega}(x)] = \left[ a_B^{(2)} \cdot \cos(2k_1x + 2\varphi_1) + a_F^{(2)} \cdot \cos(k_2x + 2\varphi_1 + \alpha_{F2}) \right] \\ -A_{2\omega}(x) \cdot \sin[\phi_{2\omega}(x)] = \left[ a_B^{(2)} \cdot \sin(2k_1x + 2\varphi_1) + a_F^{(2)} \cdot \sin(k_2x + 2\varphi_1 + \alpha_{F2}) \right] \end{cases} \quad [6.22]$$

Quadrando e sommando le espressioni precedenti si ottiene:

$$A_{2\omega}^2(x) = \left[ a_B^{(2)} \right]^2 + \left[ a_F^{(2)} \right]^2 + 2a_B^{(2)} a_F^{(2)} \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] \quad [6.23]$$

dalla quale, ricordando che:

$$\cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] = \cos^2 \left[ \frac{(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}}{2} \right] - \sin^2 \left[ \frac{(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}}{2} \right] \quad [6.24]$$

si ottiene

$$A_{2\omega}^2(x) = \left[ a_B^{(2)} - a_F^{(2)} \right]^2 + 4a_B^{(2)} a_F^{(2)} \cdot \cos^2[(0.5k_2 - k_1)x + \alpha_{F2}/2] \quad [6.25]$$

già proposta da Goda (1997). Essa mostra, come già più volte sottolineato, una periodicità dell'ampiezza di Fourier con lunghezza di ricorrenza:

$$\lambda = \frac{\pi}{(0.5k_2 - k_1)} \quad [6.26]$$

Quanto alla costante di fase  $\phi_{2\omega}(x)$ , applicando le formule di prostaferesi alle espressioni in parentesi graffe della [6.22] si ottiene direttamente:

$$\phi_{2\omega}(x) = 2\phi_1 + \Delta\phi_{2\omega}(x) \quad [6.27]$$

con :

$$\begin{cases} \cos[\Delta\phi_{2\omega}(x)] = \frac{a_B^{(2)} + a_F^{(2)} \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}]}{A_{2\omega}} \\ \sin[\Delta\phi_{2\omega}(x)] = \frac{a_F^{(2)} \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}]}{A_{2\omega}} \end{cases} \quad [6.28]$$

Seguendo l'approccio generale descritto al principio di questo paragrafo, l'Equazione [6.25] è stata quindi adattata ai dati sperimentali, applicando un criterio di minimizzazione ai minimi quadrati. Si ottengono così dei valori che dovrebbero teoricamente corrispondere alle quantità incognite  $a_B^{(2)}$ ,  $a_F^{(2)}$  e  $\alpha_{F2}$ .

#### Una breve discussione riguardo i criteri di interpolazione adottati

Può essere interessante, a questo punto dell'analisi, soffermarsi brevemente sulle modalità di adattamento ai dati sperimentali delle funzioni di fluttuazione delle ampiezze di Fourier ricavate in precedenza. A tal fine è utile riscrivere le Equazioni [6.11] e [6.23] nella forma seguente:

$$\begin{cases} A_\omega^2 = [a^{(1)}]^2 + [a_R^{(1)}]^2 + 2a^{(1)}a_R^{(1)} \cdot \cos[2k_1x + \varepsilon] \\ A_{2\omega}^2 = [a_B^{(2)}]^2 + [a_F^{(2)}]^2 + 2a_B^{(2)}a_F^{(2)} \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] \end{cases} \quad [6.29]$$

e poiché le due espressioni sono formalmente identiche conviene prenderne in considerazione una soltanto, ad esempio la prima. Applicando le formule di prostaferesi si ha:

$$A_\omega^2 = [a^{(1)}]^2 + [a_R^{(1)}]^2 + 2a^{(1)}a_R^{(1)} \cdot \cos(\varepsilon)\cos(2k_1x) - 2a^{(1)}a_R^{(1)} \cdot \sin(\varepsilon)\sin(2k_1x) \quad [6.30]$$

Dunque ponendo:

$$\begin{cases} A_\omega^2 = y \\ [a^{(1)}]^2 + [a_R^{(1)}]^2 = \alpha_0 \\ 2a^{(1)}a_R^{(1)} \cdot \cos(\varepsilon) = \alpha_1 \\ 2a^{(1)}a_R^{(1)} \cdot \sin(\varepsilon) = \beta_1 \end{cases} \quad [6.31]$$

si ottiene la forma:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(2k_1 x) + \beta_1 \sin(2k_1 x) \quad [6.32]$$

il cui adattamento ai dati sperimentali è stato già ampiamente discusso nel corso del Capitolo 5. Tuttavia una volta stimati i parametri  $\{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1\}$  devono sussistere le relazioni:

$$\begin{cases} [a^{(1)}]^2 + [a_R^{(1)}]^2 = \hat{\alpha}_0 \\ a^{(1)} \cdot a_R^{(1)} = \frac{\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1}{2} \\ \tan(\varepsilon) = -\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\alpha}_1} \end{cases} \quad [6.33]$$

Ora, le prime due mostrano che le ampiezze incognite devono appartenere contemporaneamente ad una circonferenza di raggio  $\sqrt{\hat{\alpha}_0}$  e ad un ramo di iperbole.

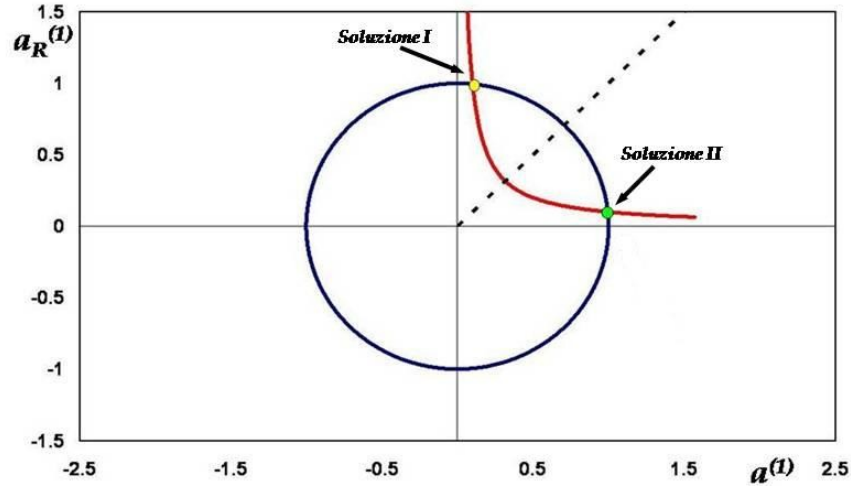


Figura 6.19. Soluzioni del problema espresso dalla [6.33].

Come mostrato in Figura 6.19, vi sono due soluzioni del problema simmetriche rispetto alla bisettrice del primo quadrante, vale a dire:

$$\begin{cases} a^{(1)} = p ; a_R^{(1)} = q & \text{soluzione I} \\ a^{(1)} = q ; a_R^{(1)} = p & \text{soluzione II} \end{cases} \quad [6.34]$$

Di queste, solo quella con  $a^{(1)} > a_R^{(1)}$  è fisicamente accettabile e questo rende il problema completamente determinato.

D'altra parte, nel caso della seconda delle relazioni [6.29] non esiste un criterio di selezione delle soluzioni, per cui è stato necessario introdurre una relazione supplementare di congruenza, discussa nella sezione seguente.

### Determinazione univoca delle componenti libere e legate

Il criterio di congruenza scelto in questo lavoro è basato sulla corrispondenza dei valori misurati e teorici (o per meglio dire "di modello") del coefficiente di asimmetria  $C_s$ .

I risultati sin qui esposti consentono infatti di scrivere:

$$\eta(x, t) = A_\omega(x) \cdot \cos[\omega t + \phi_\omega(x)] A_{2\omega}(x) \cdot \cos[2\omega t + \phi_{2\omega}(x)] \quad [6.35]$$

Ora, il coefficiente di asimmetria della funzione precedente è pari a:

$$C_s = \frac{3}{4} \cdot \frac{A_\omega^2 \cdot A_{2\omega}}{[A_\omega^2 + A_{2\omega}^2]^{3/2}} \cdot \cos(2\phi_\omega - \phi_{2\omega}) \quad [6.36]$$

come discende direttamente dalla definizione di Equazione [6.1]. Applicando quindi le relazioni [6.13] e [6.27], si ha:

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{3}{4} \cdot \frac{A_\omega^2 \cdot A_{2\omega}}{[A_\omega^2 + A_{2\omega}^2]^{3/2}} \cdot \cos(2\Delta\phi_\omega - \Delta\phi_{2\omega}) = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{A_\omega^2 \cdot A_{2\omega}}{[A_\omega^2 + A_{2\omega}^2]^{3/2}} \cdot [\cos(2\Delta\phi_\omega)\cos(\Delta\phi_{2\omega}) + \sin(2\Delta\phi_\omega)\sin(\Delta\phi_{2\omega})] \end{aligned} \quad [6.37]$$

Una volta stimate le quantità relative alla pulsazione  $\omega$ , la funzione precedente diviene determinata una volta introdotti i valori di  $a_B^{(2)}$ ,  $a_F^{(2)}$  e  $\alpha_{F2}$ .

Ora, dei due possibili valori di  $a_B^{(2)}$  e  $a_F^{(2)}$  che soddisfano l'Equazione [6.29], solo uno consentirà di ottenere, mediante l'Equazione [6.37], valori del coefficiente di asimmetria prossimi a quelli stimati empiricamente dai dati e ciò rende il problema determinato.

### 6.3.2 Confronto con i dati sperimentali

Il modello di stima al secondo ordine sin qui discusso è stato adattato ai dati sperimentali, verificando, in un gran numero di casi, una corrispondenza molto soddisfacente tra le funzioni di fluttuazione teoriche ed empiriche (Figure 6.20-6.24).

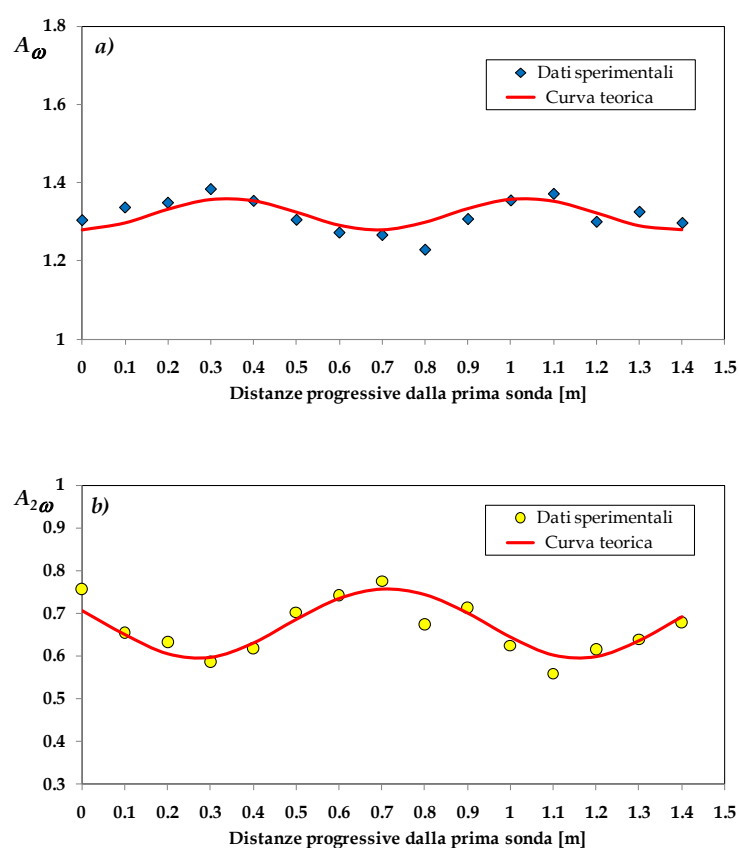


Figura 6.20. Fluttuazione delle ampiezze  $A_\omega$  e  $A_{2\omega}$  in presenza della Struttura 3  
 $[B=25\text{cm}, R_c=6.5\text{cm}, H_i=3\text{cm}, T=1\text{s}]$ .

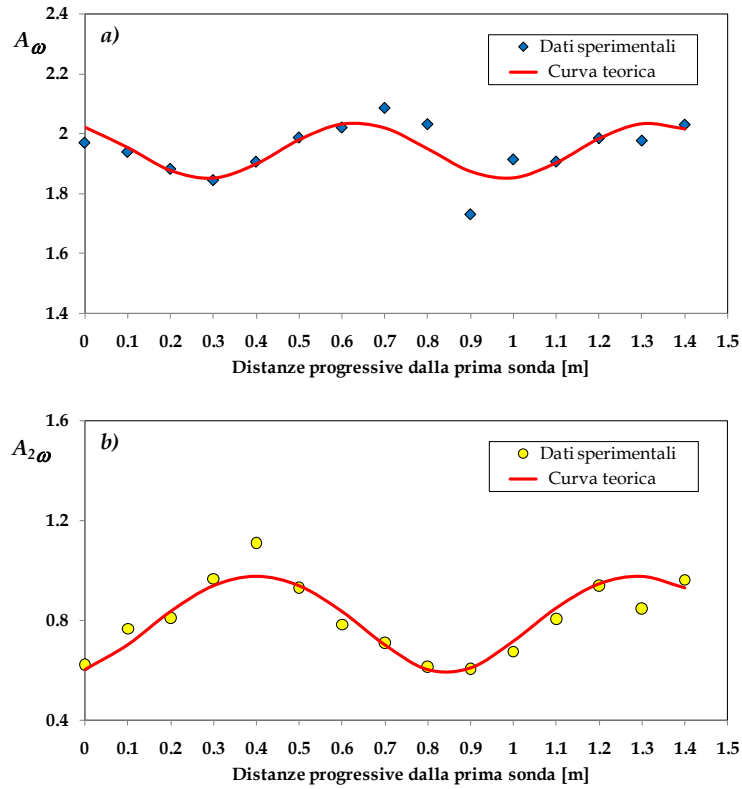


Figura 6.21. Fluttuazione delle ampiezze  $A_\omega$  e  $A_{2\omega}$  in presenza della Struttura 4 [ $B=80cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ,  $H_i=9cm$ ,  $T=1s$ ].

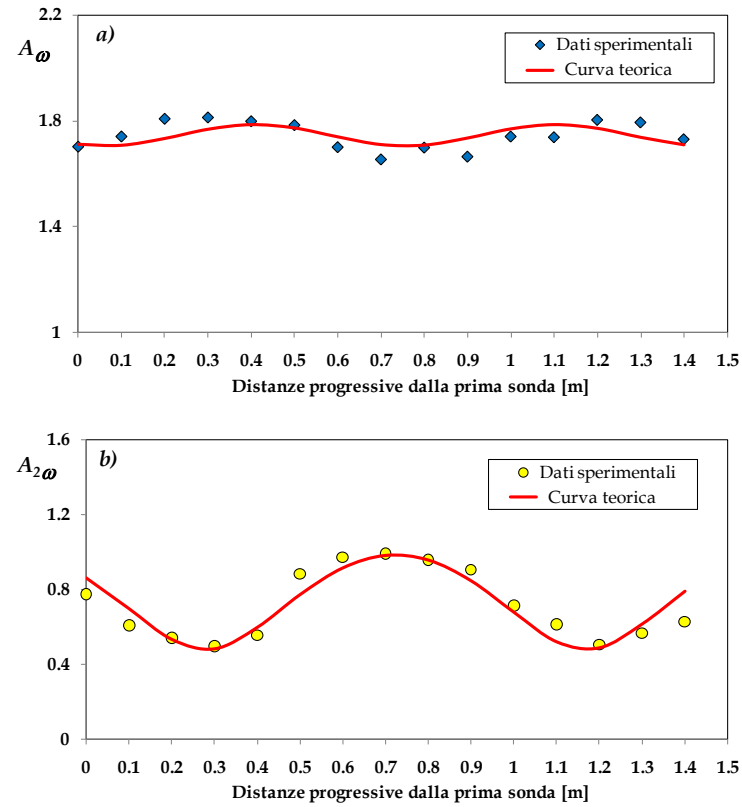


Figura 6.22. Fluttuazione delle ampiezze  $A_\omega$  e  $A_{2\omega}$  in presenza della Struttura 1 [ $B=80cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ,  $H_i=5cm$ ,  $T=1s$ ].

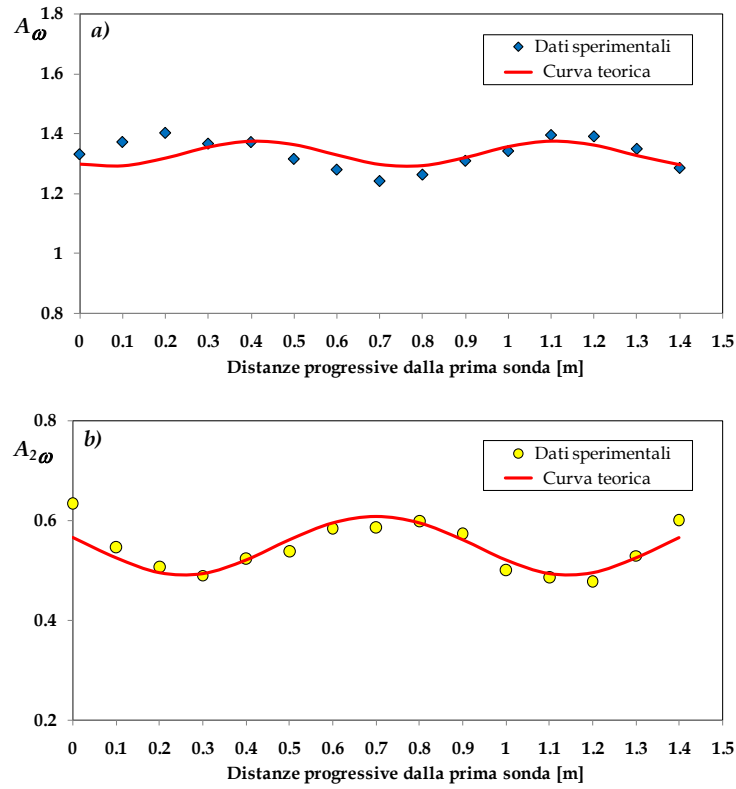


Figura 6.23. Fluttuazione delle ampiezze  $A_\omega$  e  $A_{2\omega}$  in presenza della Struttura 2  
 $[B=25\text{cm}, R_c=6.5\text{cm}, H_i=3\text{cm}, T=1\text{s}]$ .

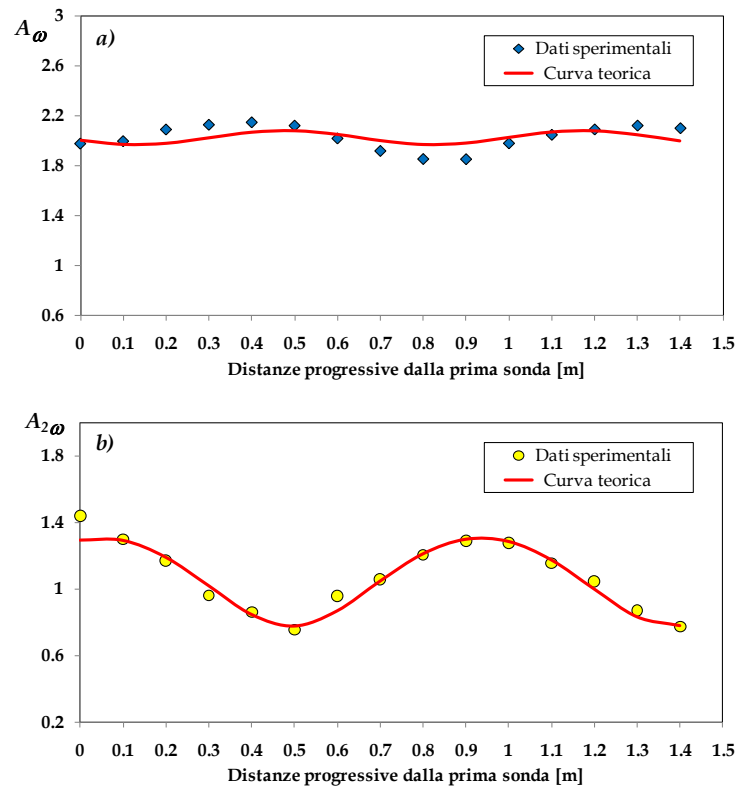


Figura 6.24. Fluttuazione delle ampiezze  $A_\omega$  e  $A_{2\omega}$  in presenza della Struttura 2  
 $[B=25\text{cm}, R_c=6.5\text{cm}, H_i=5\text{cm}, T=1\text{s}]$ .



È utile sottolineare che, per quel che riguarda le ampiezze di Fourier di pulsazione  $\omega$ , in alcuni casi l'adattamento dei dati sperimentali alla curva teorica, in termini di lunghezza d'onda dell'oscillazione spaziale, non sembra perfetto. Ciò è probabilmente dovuto al fatto che in questi casi diventano importanti gli effetti di modulazione delle componenti di interferenza  $a_{T1}^{(3)}$ ; queste ultime, sommandosi agli effetti della riflessione dovuti alla presenza della spiaggia assorbente che sono, nella maggior parte dei casi, molto ridotti, inducono una lunghezza di ricorrenza delle fluttuazioni leggermente diversa da quella espressa in nella relazione [6.12].

Ad ogni modo tali piccole discrepanze non sembrano influenzare le stime in termini di ampiezza della componente  $a^{(1)}$ .

L'adattamento dei dati sperimentali per le ampiezze  $a_F^{(2)}$  è risultato, invece, nella maggioranza dei casi molto soddisfacente.

I grafici delle Figure 6.25-6.27 mostrano alcuni esempi del "test" effettuato sul coefficiente di asimmetria, che, in ciascuna figura, è rispettivamente verificato (grafici a) e non verificato (grafici b).

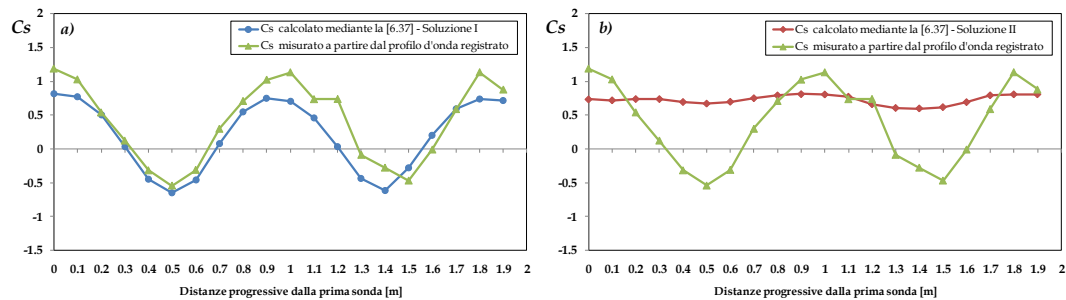


Figura 6.25. "Test" di asimmetria per la determinazione delle componenti libere e legate di pulsazione  $2\omega$  [Struttura 2,  $B=25\text{cm}$ ,  $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $H_i=5\text{cm}$ ].

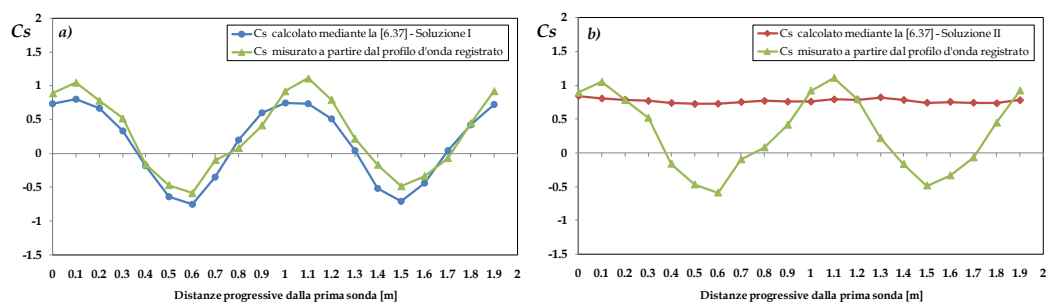


Figura 6.26. "Test" di asimmetria per la determinazione delle componenti libere e legate di pulsazione  $2\omega$  [Struttura 2,  $B=25\text{cm}$ ,  $R_c=2.6\text{cm}$ ,  $H_i=4\text{cm}$ ].

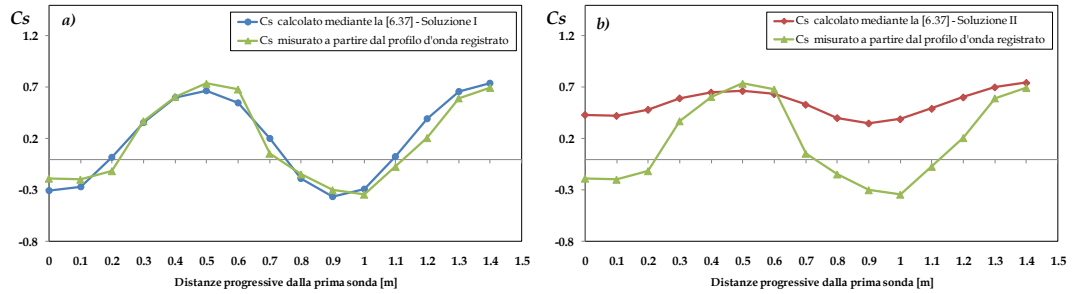


Figura 6.27. “Test” di asimmetria per la determinazione delle componenti libere e legate di pulsazione  $2\omega$  [Struttura 4,  $B=80\text{cm}$ ,  $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $H_i=4\text{cm}$ ].

E' tuttavia necessario sottolineare che il modello è stato applicato integralmente solo per  $T=1\text{s}$ . Per le onde più lunghe, infatti, la limitatezza dell'area di rilevazione sperimentale confrontata con la lunghezza teorica di ricorrenza (si veda Tabella I del Paragrafo 6.2) introduce un certo grado di incertezza nella stima delle ampiezze di pulsazione  $2\omega$ . Per questi casi è stato allora ipotizzato che l'ampiezza legata in fase,  $a_B^{(2)}$ , coincidesse con quella teorica derivante dall'espansione di Stokes al secondo ordine; in tal modo le soluzioni della seconda delle Equazioni [6.29] divengono determinate ed il test sul coefficiente di asimmetria non è più necessario.

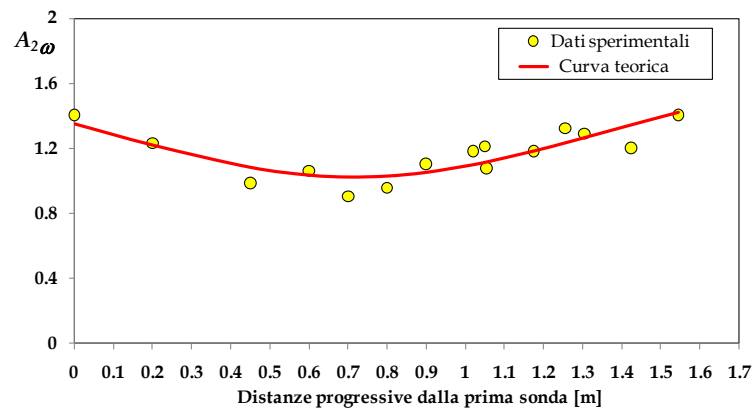


Figura 6.28a. Fluttuazione delle ampiezze  $A_{2\omega}$  per  $T=1.5\text{s}$  [Struttura 2,  $B=25\text{cm}$ ,  $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $H_i=11\text{cm}$ ].

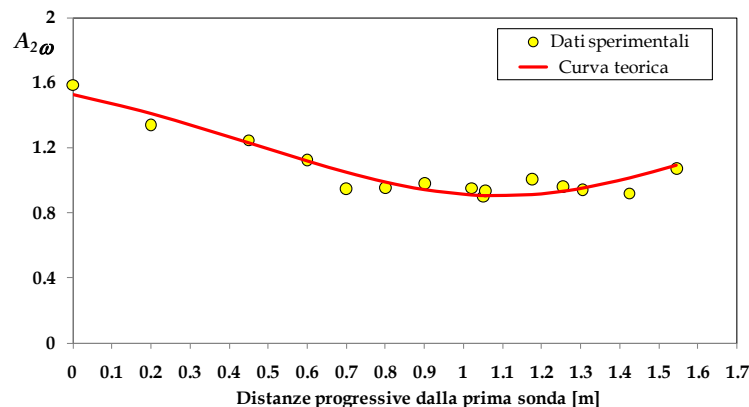


Figura 6.28b. Fluttuazione delle ampiezze  $A_{2\omega}$  per  $T=1.5\text{s}$  [Struttura 4,  $B=80\text{cm}$ ,  $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $H_i=11\text{cm}$ ].

E' interessante osservare che per  $T=1s$ , ed in presenza di struttura, i valori stimati delle componenti legate in fase sono risultati essere correlati ai valori teorici di Stokes in maniera meno robusta di quanto atteso (Figura 6.29).

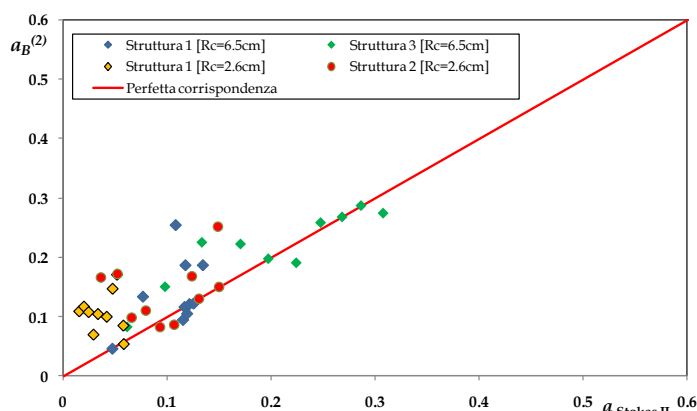


Figura 6.29. Confronto tra le  $a_B^{(2)}$  stimate e quelle calcolate con la teoria di Stokes (in presenza di struttura).

Sin qui non è stato possibile definire una ragione fisica e/o teorica di questo fenomeno, già osservato d'altra parte da Buccino et al. (2008). E' certamente possibile che esso dipenda dalla metodologia di stima (cioè dal processo di individuazione del minimo della funzione di errore), sebbene nell'adattamento dei dati per  $T=1.5s$  e  $2s$ , è talvolta sembrato che proprio l'ipotesi di coincidenza della componente legata con quella di Stokes abbia prodotto qualche "mis-fit" (Figura 6.30) rispetto all'andamento dei dati sperimentali.

Questo aspetto necessita comunque di ulteriori approfondimenti, sia sul piano teorico che su quello sperimentale.

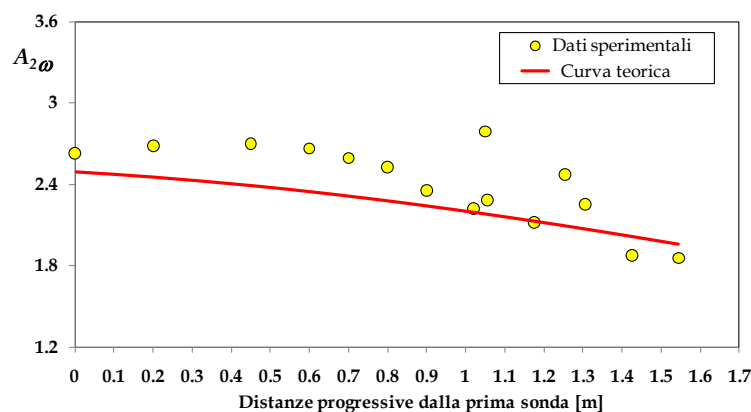


Figura 6.30. Cattiva interpolazione dei dati sperimentali ottenuta bloccando il valore di  $a_B^{(2)}$ .

### 6.3.3 Estensione alla componente $3\omega$

Come già ricordato al principio di questo paragrafo, la metodologia di stima delle componenti qui proposta è rigorosamente valida (nella sua forma integrale) sino al secondo ordine di Stokes. Essa è stata tuttavia estesa al terzo multiplo di pulsazione,  $3\omega$ , adoperando un approccio praticamente identico a quello applicato per le componenti di pulsazione doppia della fondamentale e  $T=1.5s$  e  $2s$ . Dunque, nella consueta ipotesi di considerare piccoli i coefficienti di riflessione  $[o(a)]$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \eta_{3\omega} = & a_B^{(3)} \cdot \cos(3k_1x - 3\omega t + 3\varphi_1) + a_{T3}^{(3)} \cos[(k_1 + k_2)x - 3\omega t + \varphi_{T3}] + \\ & + a_F^{(3)} \cos(k_3x - 3\omega t + \varphi_{F3}) + o(a^4) \end{aligned} \quad [6.38]$$

In cui  $a_B^{(3)}$  è l'ampiezza della componente stokiana del III ordine,  $a_{T3}^{(3)}$  è l'ampiezza della componente di interferenza del III ordine e  $a_F^{(3)}$  è l'ampiezza della super-armonica libera del III ordine;  $\varphi_{T3}$  e  $\varphi_{F3}$  sono le costanti di fase iniziali riferite rispettivamente alla componente di interferenza e a quella libera.

Analogamente a quanto visto in precedenza, dalla relazione precedente è possibile stimare  $a_F^{(3)}$  imponendo che  $a_B^{(3)}$  ed  $a_{T3}^{(3)}$  siano pari ad i rispettivi valori teorici (Goda 1997):

$$\begin{cases} a_B^{(3)} = \frac{1}{2} k_1 b_{33} [a^{(1)}]^3 \\ a_{T3}^{(3)} = \frac{1}{2} [a^{(1)}]^3 k_2^2 b^{T3} \end{cases} \quad [6.39]$$

Si noti che i coefficienti  $b_{33}$  e  $b^{T3}$  sono dati dalle relazioni [2.130] e [2.89] del Capitolo 2. Tuttavia l'analisi dei termini precedenti, anche alla luce delle soluzioni al secondo ordine già ottenute riguardo  $a_B^{(2)}$ , ha condotto alla conclusione di poter trascurare le fluttuazioni dovute alla componente "bound", essendo i valori attesi di  $a_B^{(3)}$  estremamente piccoli. Sviluppando così la relazione precedente mediante le consuete formule di prostaferesi si ottiene immediatamente:

$$\begin{cases} A_{3\omega}^2 = [a_{T3}^{(3)}]^2 + [a_F^{(3)}]^2 + 2a_{T3}^{(3)} a_F^{(3)} \cdot \cos\{[k_3 - (k_2 + k_1)]x + \Delta\varphi_{T3}\} \\ \Delta\varphi_{T3} = \varphi_{F3} - \varphi_{T3} \end{cases} \quad [6.40]$$

La legge di fluttuazione di  $A_{3\omega}$  proposta nella relazione precedente ha lunghezza di ricorrenza pari a :

$$\lambda_{3\omega} = \frac{2\pi}{[k_3 - (k_2 + k_1)]} \quad [6.41]$$

ed è stata adoperata per la stima di  $a_F^{(3)}$ , una volta fissata l'ampiezza di  $a_{T3}^{(3)}$ , mediante la seconda delle relazioni [6.39].

Le Figure 6.31 e 6.32 mostrano alcuni esempi di adattamento che indicano un accordo più che ragionevole.

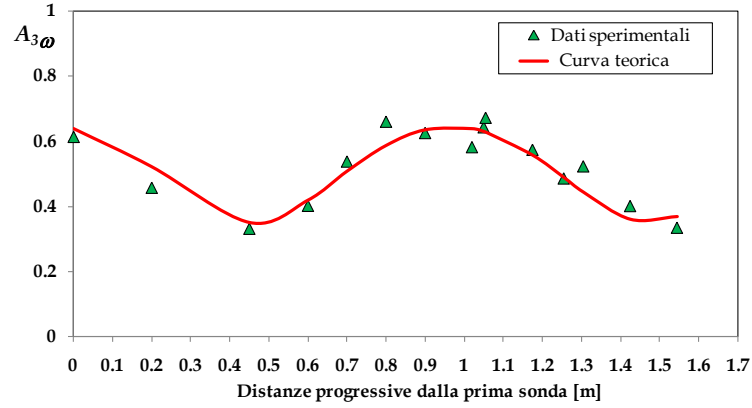


Figura 6.31. Fluttuazione delle ampiezze  $A_{3\omega}$  per  $T=1.5s$  [Struttura 1,  $B=80cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ,  $H_i=3cm$ ].

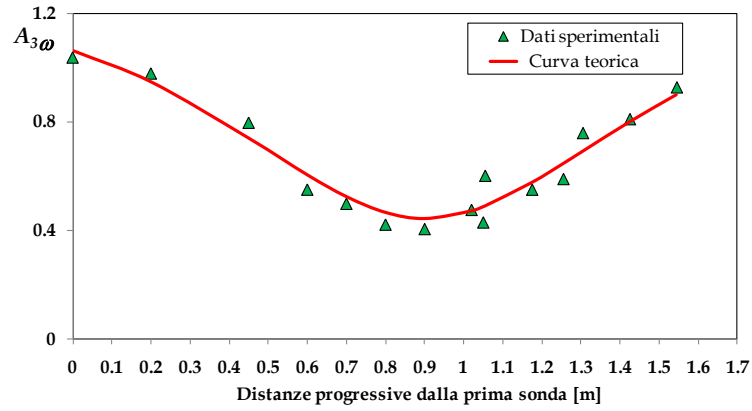


Figura 6.32. Fluttuazione delle ampiezze  $A_{3\omega}$  per  $T=2s$  [Struttura 4,  $B=80cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ,  $H_i=10cm$ ].

La Figura [6.33] mostra infine per alcuni test [ $T=1.5s$  e  $2s$ ] la fluttuazione congiunta delle componenti  $2\omega$  e  $3\omega$ . Il grafico indica chiaramente che la lunghezza di ricorrenza della pulsazione tripla è inferiore a quella della pulsazione doppia e che esiste uno sfasamento dell'ordine di  $\pi$  tra le due leggi di oscillazione. Entrambi questi risultati divergono dalle conclusioni teoriche di Goda (1997) [vedi Capitolo 2] il quale per il caso di un ondogeno a pistone aveva stimato trascurabili le fluttuazioni di  $a_F^{(3)}$ , concludendo che la legge di variazione di  $A_{3\omega}$  dovesse possedere la stessa lunghezza di *beat* della  $A_{2\omega}$  ( $\lambda$ ) ed essere in fase con quest'ultima.

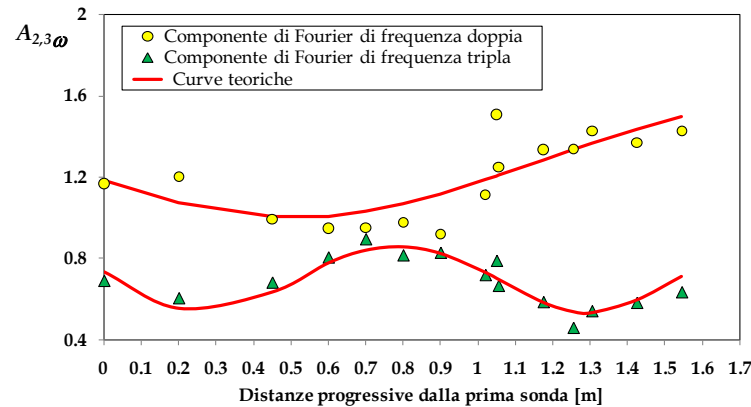


Figura 6.33a. Confronto tra le fluttuazioni delle ampiezze  $A_{2\omega}$  e  $A_{3\omega}$ ; [Struttura 2,  $B=25\text{cm}$ ,  $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $H_i=5\text{cm}$ ,  $T=1.5\text{s}$ ].

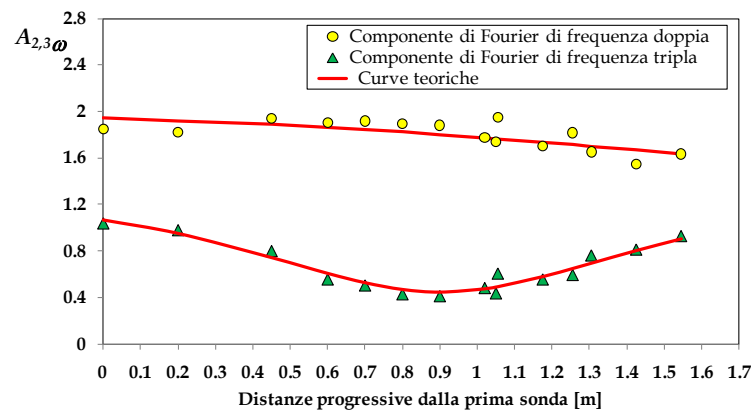


Figura 6.33b. Confronto tra le fluttuazioni delle ampiezze  $A_{2\omega}$  e  $A_{3\omega}$ ; [Struttura 4,  $B=80\text{cm}$ ,  $R_c=6.5\text{cm}$ ,  $H_i=10\text{cm}$ ,  $T=2\text{s}$ ].

Il presente risultato deriva evidentemente dal fatto che alle spalle di una barriera sommersa che interagisce con onde lunghe, la componente libera del terzo ordine è tutt'altro che trascurabile.

#### 6.3.4 Altre possibili metodologie di stima delle componenti in gioco

Nel corso di questo lavoro, la disposizione e la numerosità delle acquisizioni del segnale trasmesso ha suggerito la messa a punto del criterio di stima descritto nelle sezioni precedenti. Quest'ultimo è stato scelto soprattutto per la semplicità di implementazione ed interpretazione e perché consente di non ricorrere alle stime di *FFT* le quali, come abbiamo visto, introducono numerose sorgenti di incertezza. In ogni caso il metodo è apparso affidabile ed ha la proprietà di conservare (in linea teorica) i momenti statistici del secondo e terzo ordine del profilo trasmesso.

Tuttavia nel corso dei lavori pubblicati da Grue (1992) e Lin e Huang (2004), sono state proposte altre due metodologie di stima, basate entrambe sulla trasformata di Fourier del segnale, che muovono sostanzialmente dalle stesse ipotesi, tipiche delle tecniche di laboratorio, enunciate all'inizio di questo paragrafo. I metodi sono descritti in

dettaglio nell'ambito dell'Appendice A; è infine importante ricordare che per due configurazioni strutturali (Struttura 5 con sommergenze  $R_c=6.5\text{cm}$  e  $2.6\text{cm}$ ) l'insieme di 16/20 rilevazioni di norma qui adoperato non era disponibile; così la stima delle diverse componenti in gioco è stata affidata proprio all'approccio di Lin e Huang e ciò ha costituito spunto di confronto tra i due metodi di cui si dirà al Paragrafo 6.4.5 di questo capitolo.

## **6.4 Analisi del processo di trasmissione del moto ondoso**

In questo paragrafo si discuteranno in maniera dettagliata gli aspetti caratteristici del fenomeno di trasmissione ondosa con riferimento a ciascuno dei modelli fisici adoperati nel corso del presente lavoro. La descrizione sarà corredata da una serie di immagini fotografiche che aiuteranno a dare rilievo ai caratteri macroscopici dell'interazione onda-struttura evidenziandone, ove possibile, i legami con il processo di scomposizione dell'onda nelle super-armoniche libere ampiamente trattato nei capitoli precedenti. Il campo d'onda trasmesso sarà studiato in termini delle sue diverse componenti (ampiezza e fase delle armoniche di diversa frequenza) indicando in che modo i parametri strutturali possano influenzarne la generazione.

### **6.4.1 Generalità sul frangimento del moto ondoso su barriere sommerse: definizioni adottate nel corso di questo studio**

Nel corso dei paragrafi che seguono le caratteristiche macroscopiche del frangimento in presenza di barriere sommerse di diverse caratteristiche verrà commentato adoperando le definizioni introdotte nel corso dello studio pubblicato da Calabrese et al. (2008). Tuttavia, poiché il presente lavoro si concentra in maniera meno diretta sulla morfologia dei frangenti, verranno introdotte alcune semplificazioni di seguito descritte.

In linea generale, il verificarsi del frangimento verrà associato alla rottura della continuità del profilo ondoso provocata dalla presenza di un "*plunging-jet*" che si distacca dal pelo libero proiettandosi in avanti. La tipologia del frangente sarà invece dipendente dalla forma del profilo ondoso nell'intorno della zona di rottura. Quest'ultima può essere descritta quantitativamente dal cosiddetto angolo di "*rear-tilt*", analogo dell'angolo di "*wave-tilt*" introdotto per la prima volta da Galvin nel 1968. L'angolo in questione è compreso tra la verticale e la tangente al profilo ondoso nella zona immediatamente retrostante la zona di rottura (Figura 6.34).

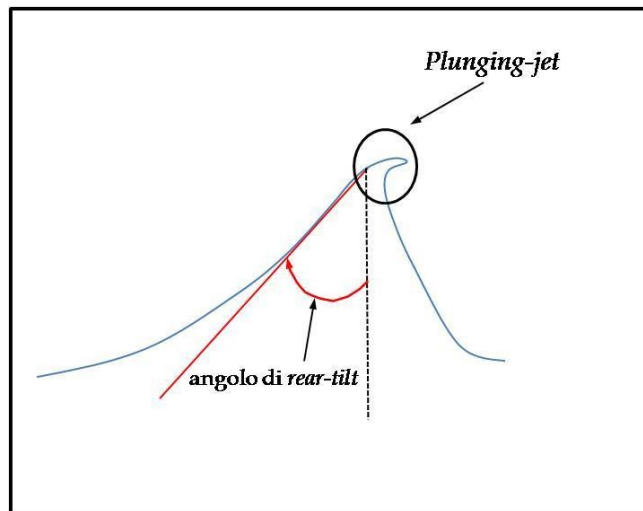


Figura 6.34. Definizione di “*plunging-jet*” ed angolo di “*rear-tilt*”.

È possibile così individuare tre grandi famiglie di frangenti in accordo con le definizioni di seguito introdotte.

Le forme *Spilling-Plunging* [S-P] sono caratterizzate da un angolo di tilt minore di  $90^\circ$  (Foto 6.1). In generale il termine *Spilling* [S] (da solo) verrà adoperato per indicare che il *plunging-jet* possiede dimensioni limitate e quantità di moto modeste. All'estremo opposto, il termine *Plunging* [P] verrà adoperato per indicare evidenti distaccamenti di fluido dalla cresta, con quantità di moto conseguentemente elevate.

I frangimenti di tipo *Bore* [B] sono caratteristici di onde lunghe che evolvono su barriere di estensione relativamente limitata. Essi possiedono un angolo di tilt circa pari a  $90^\circ$  (Foto 6.2) da cui la somiglianza con i ben noti profili di risalto idraulico (Figura 6.35).

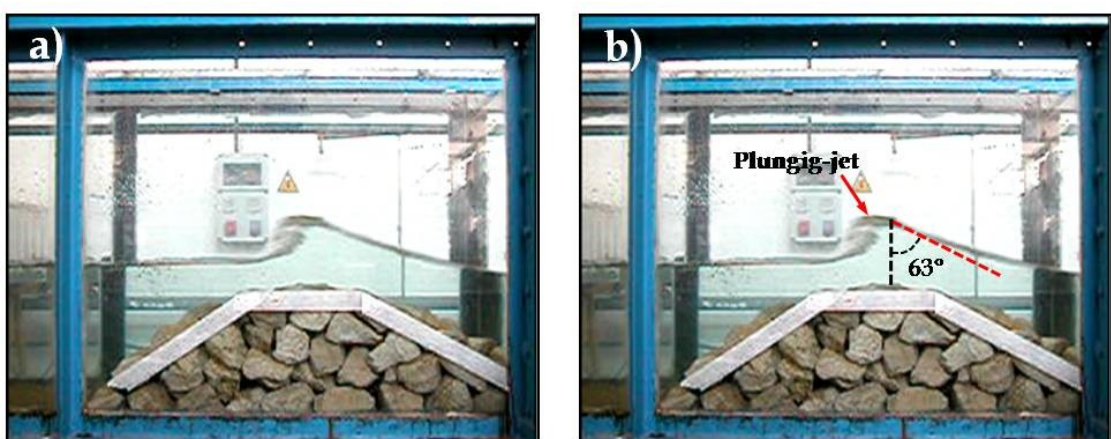


Foto 6.1. Frangimento di tipo *Spilling-Plunging* [da Calabrese et al., 2008].



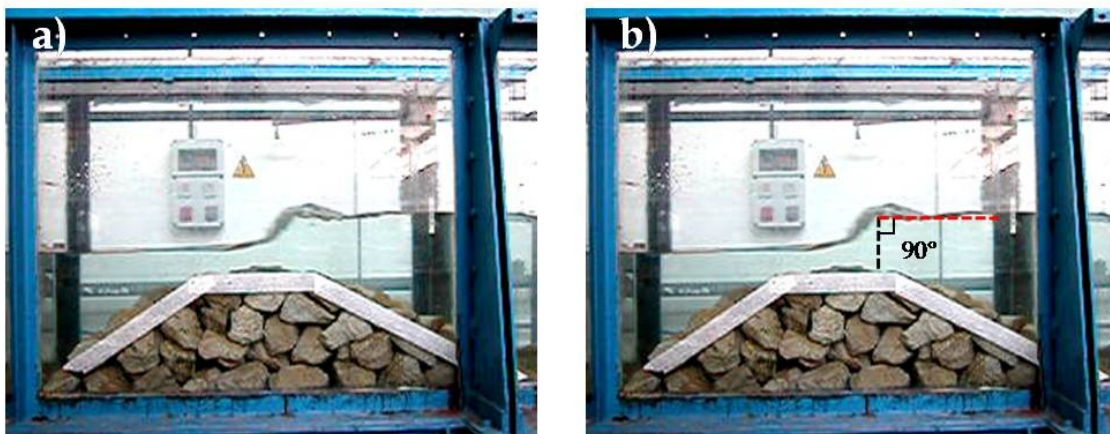


Foto 6.2. Frangimento di tipo *Bore* [da Calabrese et al., 2008].

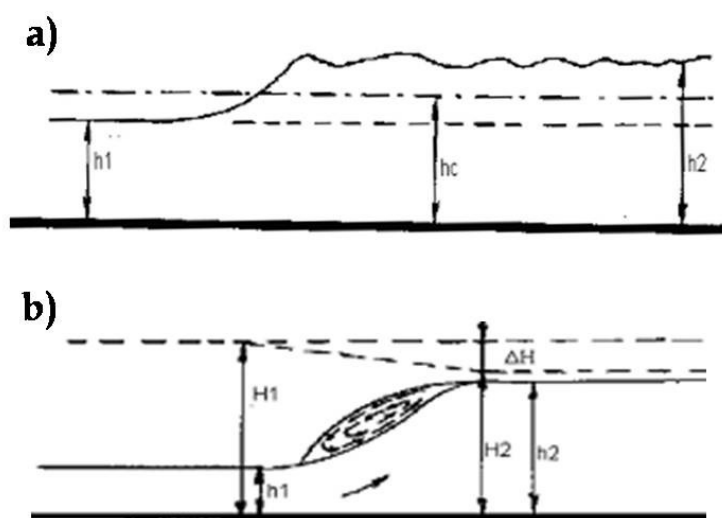


Figura.6.35. Schematizzazione di un risalto idraulico ondulato (a) e diretto (b).

Peraltro la successiva evoluzione del frangente sulla cresta dell'opera determina, o può determinare se la cresta è sufficientemente estesa, una nuova rottura in forma [S-P].

I frangimenti di tipo *Surging* [Sg] e *Collapsing* [C] sono caratterizzati da un angolo di tilt maggiore di  $90^\circ$  (Foto 6.3). Essi hanno luogo prevalentemente all'estremità lato mare della cresta della barriera, quando le condizioni di sommergenza sono tali da provocare la rottura del profilo idrico nella fase di "run-down" dell'onda incidente. La successiva evoluzione del frangente sulla cresta della barriera darà poi luogo a frangimenti di tipo [S-P].



Foto 6.3. Frangimento di tipo *Collapsing* [da Calabrese et al., 2008].

Accanto alla morfologia vera e propria dei frangenti, può essere utile introdurre un riferimento convenzionale che consenta di localizzare il punto di rottura dell'onda.

In Calabrese et al. (2008) il punto di frangimento viene rigorosamente definito come l'ascissa della proiezione ortogonale della base del "*plunging-jet*" rispetto ad un riferimento fisso. In questa sede, tuttavia, appare più adeguata agli scopi di questa tesi l'introduzione di definizioni più qualitative; distingueremo così:

- punto di frangimento in corrispondenza del paramento lato protetto dell'opera [*in.slope*]
- punto di frangimento nella seconda metà della cresta (lato protetto) [*in.crest*]
- punto di frangimento nella parte centrale della cresta [*m.crest*]
- punto di frangimento nella prima metà della cresta (lato mare) [*out.crest*]
- punto di frangimento in corrispondenza del paramento lato mare dell'opera [*out.slope*]

La Figura 6.36 riassume le definizioni precedenti.

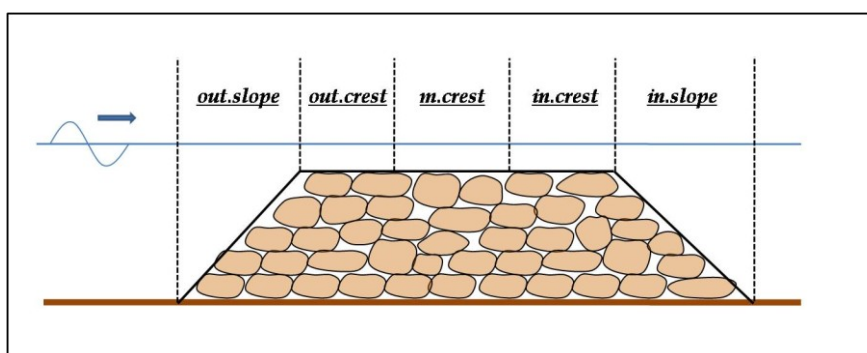


Figura 6.36. Schematizzazione geometrica delle possibili localizzazioni del punto di frangimento.

Nei paragrafi che seguono, i sei modelli fisici studiati verranno analizzati individualmente, distinguendo le caratteristiche morfologiche del profilo ondoso che su di essi evolve, dalle proprietà spettrali e statistiche del moto ondoso trasmesso.

La barriera omogenea con cresta stretta e sommergenza elevata ( $B=25\text{cm}$  e  $R_c=6.5\text{cm}$ ) verrà adoperata come riferimento e, dunque, analizzata per prima. Sarà così più agevole commentare in maniera sistematica l'effetto delle diverse variabili progettuali qui considerate.

#### 6.4.2 Barriera omogenea a cresta stretta e sommergenza elevata (struttura di riferimento)

##### Analisi macroscopica dell'interazione con moto ondoso

Per  $T=1\text{s}$ , la transizione “non-frangimento/frangimento” ha luogo mediante un modesto *spilling* (angolo di *rear-tilt* circa uguale a  $70^\circ$ ); quest'ultimo si verifica in prossimità del limite interno (lato protetto) della cresta per un'altezza del moto ondoso incidente  $H_i$  (di target) pari a  $4\text{cm}$  (Foto 6.4).

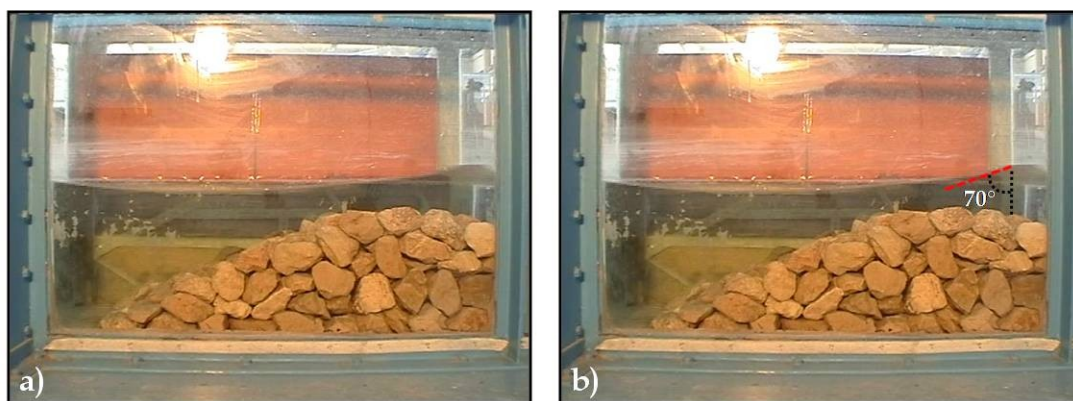


Foto 6.4. Frangimento di tipo *Spilling* per test con  $H_i=4\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$ .

In realtà la quantità di moto e le dimensioni del getto sono assai modeste tanto da renderne l'individuazione leggermente ambigua. Difficoltà analoghe per frangimenti di tipo *Spilling* sono state già riferite in passato da Basco (1982), con riferimento ad onde frangenti su spiagge piane.

Al crescere dell'altezza d'onda i frangenti divengono più propriamente di tipo *spilling-plunging* (o *plunging*). Il fronte dell'onda diviene, in corrispondenza della rottura, sub-verticale e la potenza dei *plunging jet* cresce progressivamente, mentre il punto di rottura arretra (Foto 6.5).





Foto 6.5. Sequenze di frangimento per  $H_i=7cm$ ,  $H_i=8cm$  ed  $H_i=9cm$ .

È interessante osservare che il “*punto di plunging*”, ovvero il punto in cui il getto colpisce la superficie idrica antistante, è quasi sempre localizzato sul paramento lato protetto; solo a partire da  $H_i=11cm$  esso è ubicato chiaramente sulla cresta della barriera (Foto 6.6).



Foto 6.6. Sequenza di frangimento per  $H_i=11\text{cm}$ .

Per  $T=1.5\text{s}$  la transizione “non-frangimento/frangimento” è ritardata ad  $H_i=5\text{cm}$ . La rottura iniziale avviene in forma di *Bore* ed, ancora una volta, mediante uno “*spil*” di modestissime dimensioni. La Foto 6.7 mostra come il debole *plunging-jet* sia localizzato nella parte terminale lato protetto della cresta anticipando il profilo di pelo libero con angolo di *rear-tilt* circa pari a  $87^\circ$ .



Foto 6.7. Frangimento di tipo *Bore* per test con  $H_i=5\text{cm}$  e  $T=1.5\text{s}$ .





Foto 6.8. Frangimento di tipo *Bore* per test con  $H_i = 5\text{cm}$  e  $T = 1.5\text{s}$  (istante successivo a quello rappresentato nella Foto 6.7)

Il getto è più evidente nella Foto 6.8, che si riferisce ad un istante immediatamente successivo rispetto alla Foto 6.7.

Il meccanismo appena descritto sembra ripetersi, più o meno identicamente, sino ad  $H_i = 8\text{cm}$ . Successivamente la rottura principale diviene di tipo [S-P], con punto di plunging localizzato in corrispondenza del paramento lato protetto della struttura. La Foto 6.9 mostra alcune fasi del frangimento per  $H_i = 10\text{cm}$  ed  $11\text{cm}$ .

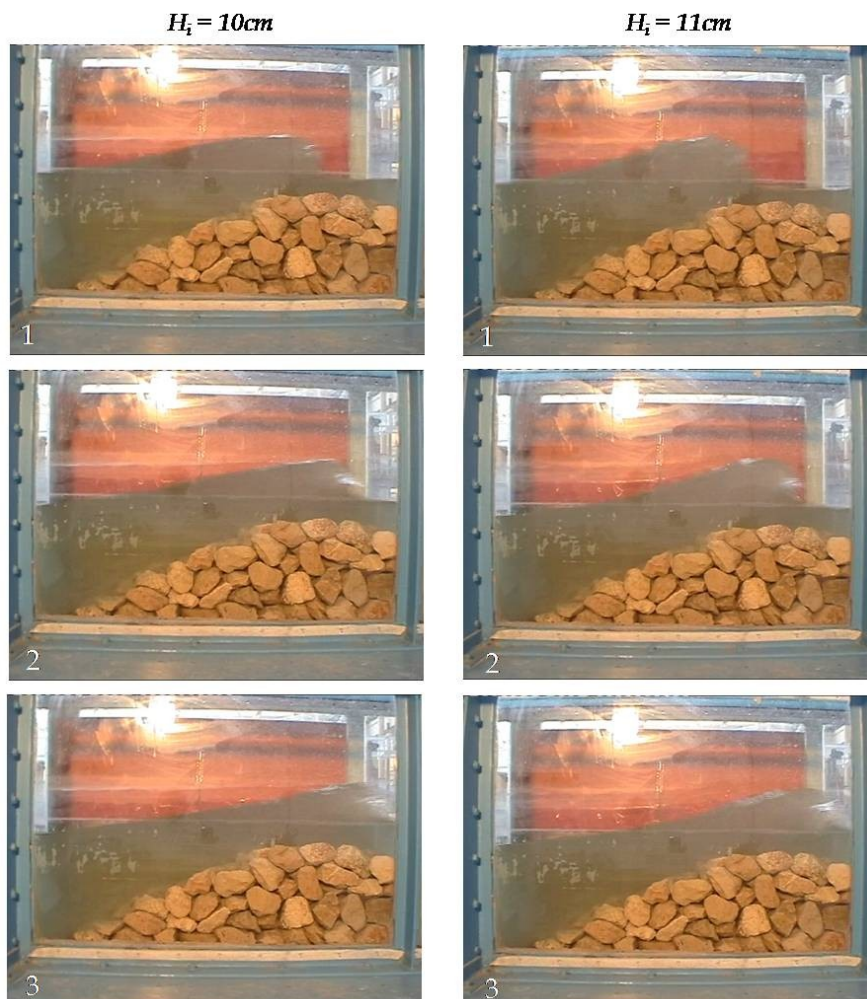


Foto 6.9. Sequenze di frangimento per  $H_i = 10\text{cm}$ ,  $H_i = 11\text{cm}$  con periodo  $T = 1.5\text{s}$ .

In presenza di onde con periodo  $T=2s$  il punto di prima rottura si sposta ulteriormente sino ad  $H_i=7cm$ . La transizione avviene secondo un frangente di tipo *Bore*, seguito, a partire dall'onda con  $H_i=9cm$ , da frangimenti di tipo *Plunging* che si sviluppano prevalentemente sul paramento lato protetto. In questi casi la fase di rottura incipiente è tuttavia alquanto complessa, con profili ondosi che mostrano di sovente due gibbi nella zona intorno alla cresta, interessati da una rottura più o meno continua (Foto 6.10).



Foto 6.10. Sequenza di frangimento per  $H_i=10cm$  con periodo  $T=2s$ .

La Tabella 6.II fornisce un quadro riassuntivo dell'analisi sin qui discussa.

h = 31.5 cm		T=1s		T=1.5s		T=2s	
Test	H (cm)	Frangimento	Punt.Frang.	Frangimento	Punt.Frang.	Frangimento	Punt.Frang.
1	3	NO		NO		NO	
2	4	SI [S-P]	in.crest	NO		NO	
3	5	SI [S-P]	in.crest	SI [B-S]	in.crest	NO	
4	6	SI [S-P]	in.crest	SI [B-S]	in.crest	NO	
5	7	SI [S-P]	in.crest	SI [B-S]	m.crest	SI [B-P]	in.crest
6	8	SI [S-P]	m.crest	SI [B-S]	m.crest	SI [B-P]	in.crest
7	9	SI [S-P]	m.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [P]	in.slope
8	10	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [P]	in.slope
9	11	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [P]	in.slope
10	12	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [P]	in.slope

Tabella 6.II. Quadro riassuntivo delle caratteristiche macroscopiche di interazione onda-barriera (Struttura 3)

### Ampiezze del moto ondoso trasmesso

Le Figure da 6.38 a 6.40 mostrano l'andamento delle prime tre componenti libere di cui è costituito il moto ondoso trasmesso<sup>2</sup>. A tal proposito è utile sottolineare che come componente del terzo ordine è stata qui considerata solo l'onda libera associata alla risposta non lineare della struttura [free wave di ampiezza  $a_{FT}^{(3)}$ ], rimandando a successivi grafici l'analisi del disturbo di interferenza [onda di ampiezza  $a_{TT}^{(3)}$ ].

I grafici del tipo "A" indicano che l'ampiezza della fondamentale trasmessa cresce in maniera continua al crescere dell'altezza d'onda incidente misurata "globale",  $H_{en,i}$ ; quest'ultima è stata definita come :

$$H_{en,i} = \sqrt{8}\bar{\sigma}_i \quad [6.42]$$

in cui  $\bar{\sigma}_i$  rappresenta la deviazione standard dell'elevazione d'onda incidente (in assenza di struttura) mediata attraverso le differenti posizioni di misura<sup>3</sup>.

I grafici "B" mostrano d'altra parte che il tasso di crescita della fondamentale è inferiore rispetto a quello dell'onda incidente, determinando una riduzione del rapporto  $a_{FT}^{(1)}/H_{en,i}$ . Quest'ultimo effetto dipende sia dal comportamento non lineare della struttura (che induce uno spostamento della potenza del segnale sulle frequenze più alte), sia dalla riflessione dell'energia ondosa incidente sia, soprattutto, dagli effetti dissipativi associati all'interazione onda struttura.

Tali effetti dissipativi comprendono il frangimento come sorgente principale, ma anche le dissipazioni associate al flusso attraverso il corpo dell'opera (probabilmente modeste per strutture di estensione limitata) ed i vortici che hanno luogo in corrispondenza del profilo della struttura (Figura 6.37).

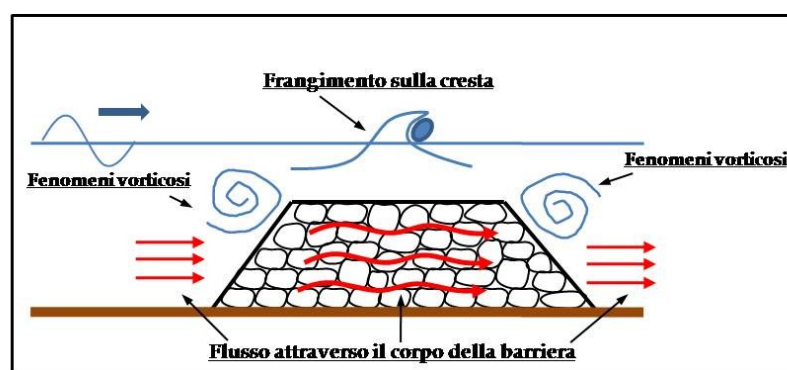


Figura 6.37. Schema delle dissipazioni subite dal moto ondoso.

<sup>2</sup> Si noti che nel prosieguo di questo capitolo le notazioni simboliche riferite alle diverse componenti ondose porteranno un pedice "T" essendo queste quantità "trasmesse" a tergo della barriera. Inoltre l'ampiezza della componente fondamentale presenterà un pedice "F" per sottolineare la sua natura di armonica "libera".

<sup>3</sup> L'operazione di media è stata effettuata per tener conto delle possibili fluttuazioni della varianza, dovute sia alla presenza di onde spurie generate dal battitore (Capitolo 2), sia alla riflessione (attesa comunque modesta) della spiaggia assorbente. È utile infine ricordare che l'altezza d'onda definita mediante l'equazione [6.42] coincide con l'altezza d'onda di zero crossing (cresta-cavo) solo nel caso di onde lineari.



Per di più, la combinazione di questi fattori (soprattutto non linearità e frangimento) determina un andamento convesso di  $a_{FT}^{(1)}$  delle curve nei grafici "A"; quest'ultimo è più evidente per il periodo  $T=1s$  in quanto le onde incidenti più corte risentono in misura maggiore della presenza dell'opera.

Le componenti libere trasmesse del II e III ordine sembrano mostrare un andamento duale rispetto alla componente fondamentale. Prima del frangimento, le ampiezze crescono con tassi maggiori rispetto agli incrementi di altezza d'onda incidente (si confrontino grafici "A" e "B"). Dai grafici "B" si nota inoltre come la transizione "non-frangimento/frangimento" stimata dalle analisi video (individuato nelle figure da una linea verticale tratteggiata corrispondente alla prima onda frangente), si localizzi in prossimità del valore massimo raggiunto dalle super-armoniche. Per  $T=2s$  ciò vale soprattutto per la terza super-armonica, in quanto  $a_{FT}^{(2)}$  mostra un'ampia zona di stazionarietà (Figura 6.40b).

Non appena raggiunto il primo frangimento si osserva una progressiva riduzione delle ampiezze libere di ordine superiore.

Può essere interessante commentare i grafici di tipo "C". Qui sulle ordinate è stato riportato il rapporto tra la potenza della componente libera trasmessa di ordine  $i$ -esimo e la potenza media trasmessa "globale", calcolata come:

$$P_{TM} \cong \frac{1}{2} \left[ \left( a_{FT}^{(1)} \right)^2 + \left( a_{BT}^{(2)} \right)^2 + \left( a_{FT}^{(2)} \right)^2 + \left( a_{FT}^{(3)} \right)^2 + \left( a_{TT}^{(3)} \right)^2 \right] \quad [6.43]$$

ovvero prescindendo dalle fluttuazioni di cui si è ampiamente discusso nel Paragrafo 6.3. Come è evidente, nell'equazione [6.43] è stata introdotta l'ulteriore ipotesi che le componenti legate del terzo ordine siano di ampiezza trascurabile.

Le Figure mostrano come, sino all'occorrenza del primo frangimento, i caratteri non lineari dell'interazione onda-struttura si manifestino con una progressiva riduzione della percentuale di potenza portata dalla fondamentale. In effetti la transizione "non-frangimento/frangimento" ha luogo in corrispondenza del minimo di tale percentuale e corrisponde, approssimativamente, al picco della componente non lineare significativa con frequenza maggiore. Dopo che il frangimento ha avuto luogo, si assiste ad una riduzione della percentuale di potenza portata dalle super armoniche, che sembrerebbe procedere dalle componenti più ripide (III ordine) a quelle più lunghe (II ordine); questo fenomeno provoca ovviamente un recupero della percentuale di potenza associata alla fondamentale, in misura dipendente dalla capacità del frangimento di determinare o meno una significativa dissipazione di energia.

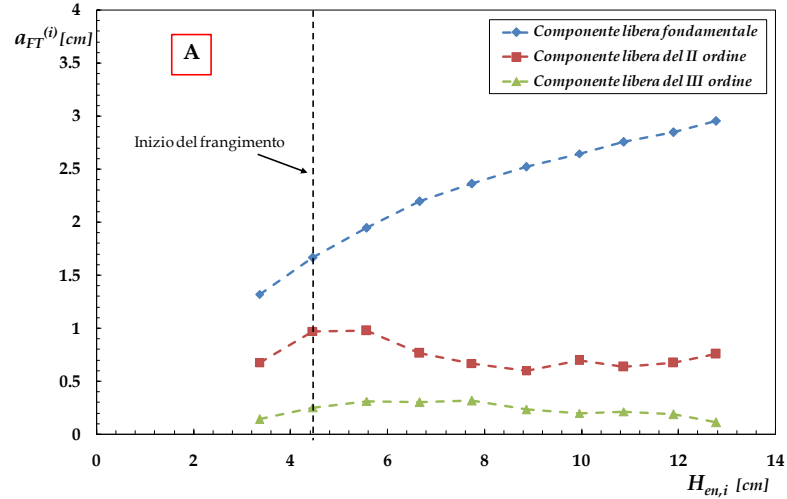


Figura 6.38a. Andamento delle componenti libere di ordine i-esimo in funzione dell'altezza d'onda incidente per onde di periodo  $T=1s$ .

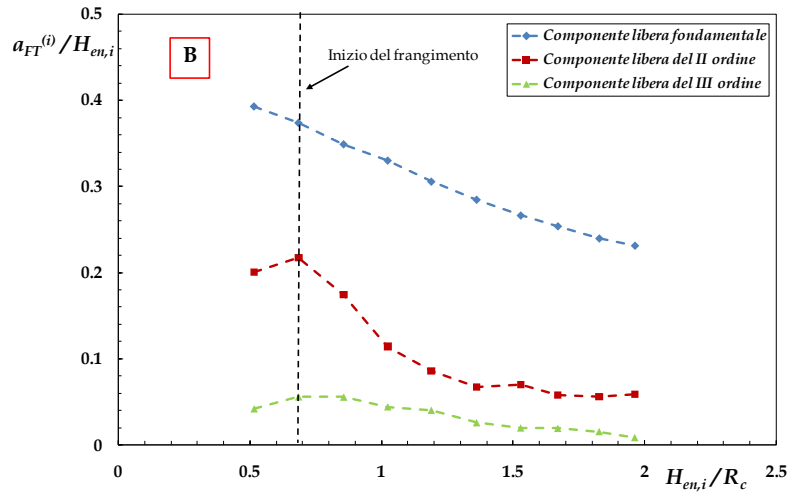


Figura 6.38b. Andamento del rapporto tra l'ampiezza dell'onda libera di ordine i-esimo e l'altezza d'onda incidente in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa.  $[T=1s]$ .

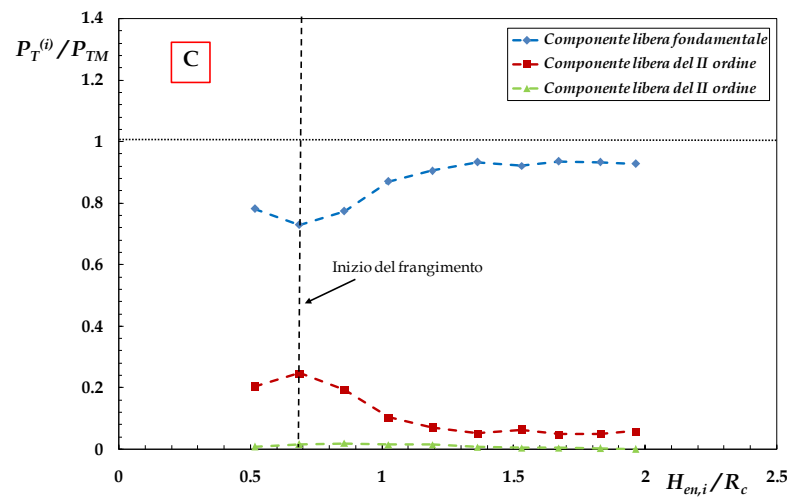


Figura 6.38c. Percentuali di potenza trasmessa relative alle componenti libere di ordine i-esimo in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa.  $[T=1s]$ .

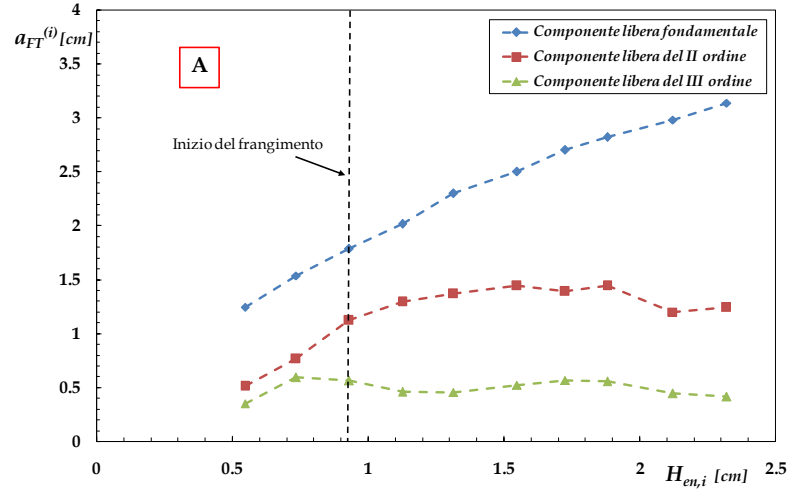


Figura 6.39a. Andamento delle componenti libere di ordine i-esimo in funzione dell'altezza d'onda incidente per onde di periodo  $T=1.5s$ .

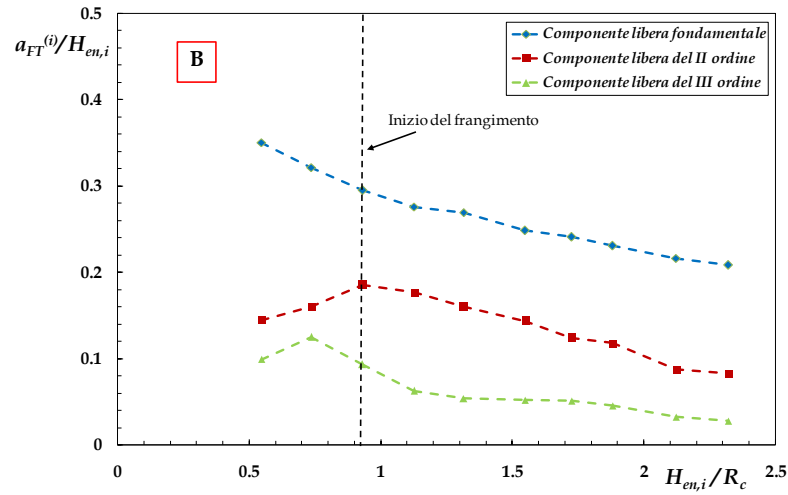


Figura 6.39b. Andamento del rapporto tra l'ampiezza dell'onda libera di ordine i-esimo e l'altezza d'onda incidente in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa. [ $T=1.5s$ ].

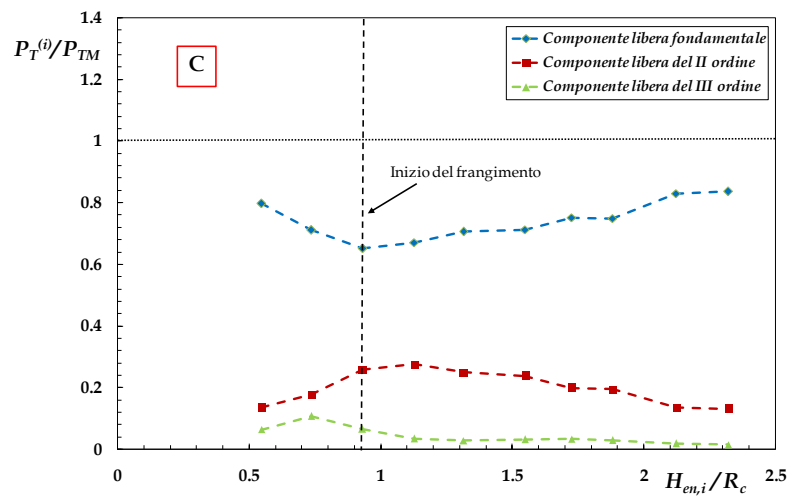


Figura 6.39c. Percentuali di potenza trasmessa rispetto relative alle componenti libere di ordine i-esimo in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa. [ $T=1.5s$ ].

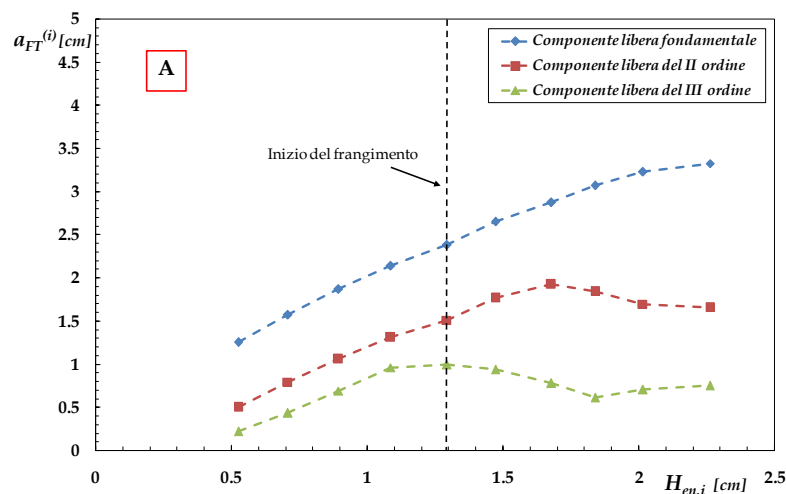


Figura 6.40a. Andamento delle componenti libere di ordine i-esimo in funzione dell'altezza d'onda incidente per onde di periodo  $T=2s$ .

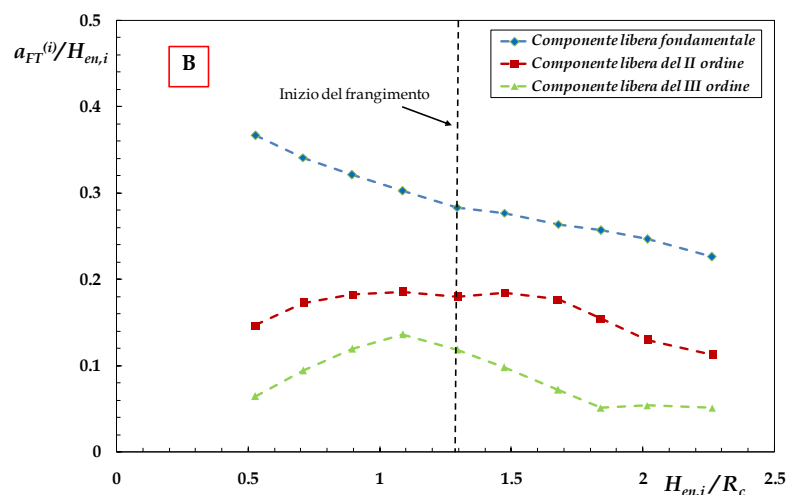


Figura 6.40b. Andamento del rapporto tra l'ampiezza dell'onda libera di ordine i-esimo e l'altezza d'onda incidente in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa.  $[T=2s]$ .

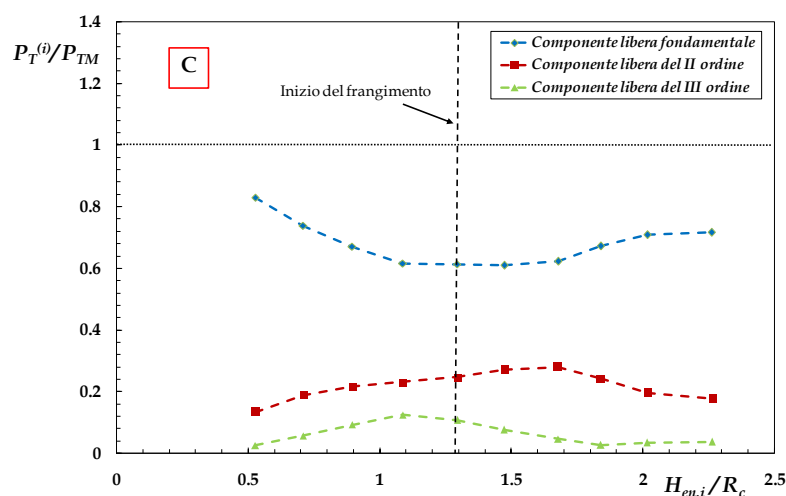


Figura 6.40c. Percentuali di potenza trasmessa rispetto relative alle componenti libere di ordine i-esimo in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa.  $[T=2s]$ .

Ad ulteriore commento di questa porzione di esperimenti, le Figure 6.41 ed 6.42 mostrano le ampiezze delle componenti super armoniche libere rapportate alla fondamentale, in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente,  $H_{en,i}/R_c$ . Nei grafici, le transizioni "non-frangimento/frangimento" sono indicate con opportune frecce. Dalle Figure è ancora una volta evidente la correlazione tra frangimento ed andamento delle componenti non lineari; al crescere del periodo il ritardarsi del frangimento determina un valore via via maggiore del picco del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$  e  $a_{FT}^{(3)}/a_{FT}^{(1)}$ . Si noti come per  $T=2s$  tali valori di picco attingano rispettivamente 0.7 e 0.5, evidenziando che le componenti libere super-armoniche attingono valori dello stesso ordine di grandezza della principale.

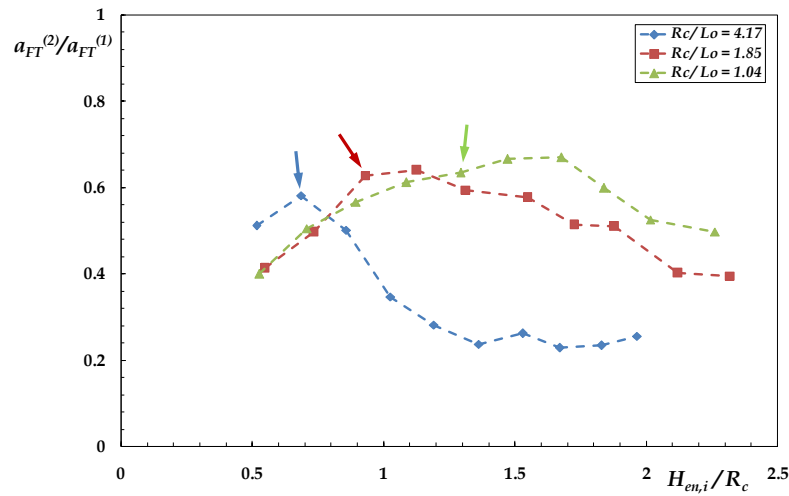


Figura 6.41. Ampiezza dell'armonica libera di pulsazione  $2\omega$  rapportata alla fondamentale in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente.

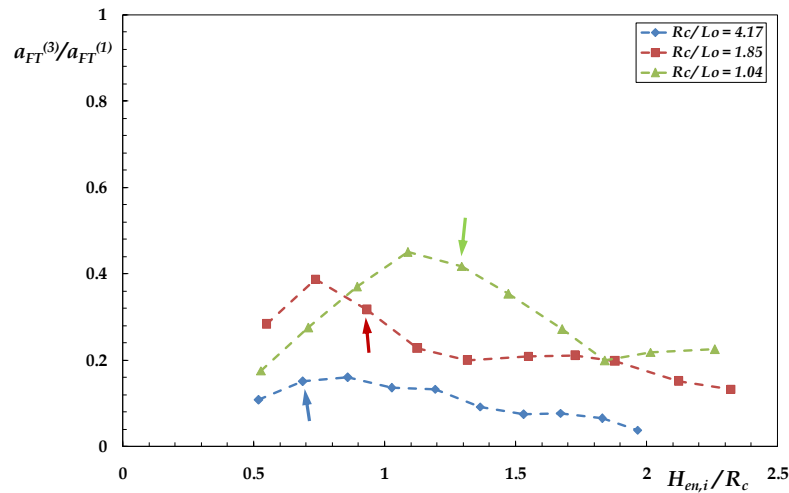


Figura 6.42. Ampiezza dell'armonica libera di pulsazione  $3\omega$  rapportata alla fondamentale in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente.

Nelle Figura 6.43a e 6.43b sono riportati in ordinate rispettivamente i fattori di proporzionalità  $b_{F2}$  e  $b_{F3}$  definiti da Goda (1997) nello studio sul comportamento non

lineare dei battenti a pistone di cui si è discusso nel Capitolo 2. Essi sono definiti come:

$$\begin{cases} b_{F2} = \frac{a_{FT}^{(2)}}{k_2 (a_{FT}^{(1)})^2} \\ b_{F3} = \frac{a_{FT}^{(3)}}{0.5 k_3^2 (a_{FT}^{(1)})^3} \end{cases} \quad [6.44]$$

Nella teoria generale del battitore tali coefficienti sono in realtà funzioni unicamente di  $k_1 h$ . In particolare, nella semplice teoria proposta da Madsen (1971) e valida al II ordine di approssimazione per onde lunghe, si ha:

$$b_{F2} = \frac{1}{2} \frac{ctgh(k_1 h)}{k_2 h} \cdot \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{\sinh(k_1 h)} - \frac{n_1}{2} \right] \cdot \frac{\tanh(k_2 h)}{n_2} \quad [6.45]$$

in cui  $n_1$  ed  $n_2$  sono i ben noti coefficienti di proporzionalità tra celerità di gruppo e celerità di fase, rispettivamente riferiti alla frequenza fondamentale ( $\omega$ ) ed alla prima superarmonica libera ( $2\omega$ ). Si noti inoltre che, nell'ambito della teoria più generale pubblicata da Goda nel 1998 ed approssimata al III ordine, i coefficienti di cui alla formula [6.44] assumono espressioni piuttosto complesse dipendenti, tra l'altro, dalla numerosità dei modi evanescenti portati in conto (vedi par. 2.3). Nel grafico di Figura 6.46a i dati sperimentali si riducono al crescere della ripidità ondosa trasmessa al I ordine  $[k_1 a_{FT}^{(1)}]$  in maniera sorprendentemente coerente. Solo per i valori più piccoli delle ascisse, i dati sembrerebbero accennare ad una disposizione orizzontale coerente con la teoria degli ondogeni a pistone. Tali presunti valori asintotici, sottolineati mediante rette tratteggiate in Figura, crescono (consistentemente con la teoria) al ridursi di  $k_1 h$  ovvero, per il caso qui esaminato, al crescere del periodo  $T$ . Tuttavia i livelli presumibilmente attinti sono molto superiori rispetto a quelli previsti dalle equazioni proposte da Goda (1997) e Madsen (1971). Discorso analogo può ripetersi a proposito delle componenti libere del III ordine (Figura 6.43b) la cui grande varianza ha tuttavia imposto l'utilizzo di una scala di rappresentazione semi-logaritmica.

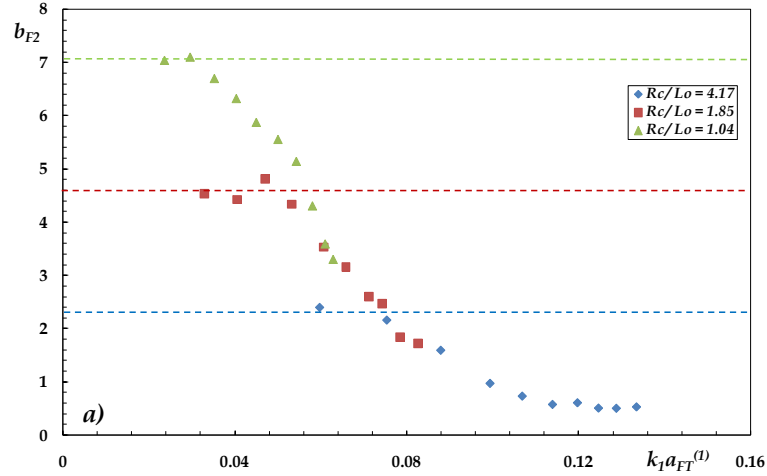


Figura 6.43a. Fattore di proporzionalità  $b_{F2}$  calcolato secondo la [6.44] in funzione della ripidità dell'onda trasmessa del I ordine.

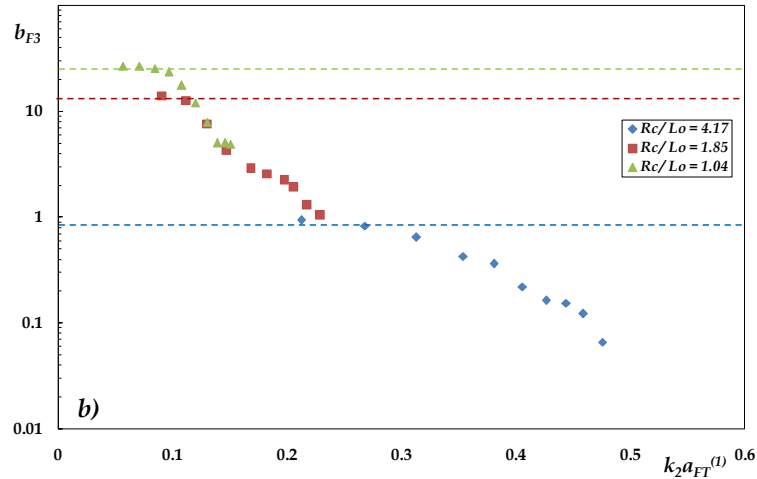


Figura 6.43b. Fattore di proporzionalità  $b_{F3}$  calcolato secondo la [6.44] in funzione di  $k_2 a_{FT}^{(1)}$ .

#### Lag di fase iniziale tra le componenti trasmesse del I e del II ordine

Per discutere questo aspetto peculiare del processo di trasmissione è utile innanzitutto sottolineare che il *lag* di fase iniziale dipende, ovviamente, dalla scelta del sistema di riferimento.

Per la scelta di quest'ultimo opereremo in analogia con i risultati della teoria del battente a pistone, analogia che costituisce una delle direttrici principali del lavoro di tesi. Dai risultati ottenuti nel corso del Capitolo 2 si deduce facilmente che, nella condizione limite di acque intermedie/basse ( $h/L < 0.1$ ), il *lag* di fase attingeva il valore limite di  $-\pi$  rispetto ad un riferimento fisso in cui l'origine dell'asse delle ascisse coincideva con la posizione di riposo dell'ondogeno. Nel seguito, dunque, opereremo come segue. Definiremo innanzitutto un riferimento fisso, coincidente con il piede interno dell'opera; i valori dello sfasamento stimati in corrispondenza della prima

posizione di misura verranno, dunque, traslati opportunamente sino al riferimento fisso mediante la relazione immediata:

$$\alpha_{F2}^{piede} = \alpha_{F2}^{mis} + (k_2 - 2k_1) \Delta X_{mis,p} \quad [6.46]$$

in cui  $\alpha_{F2}^{mis}$  è il lag di fase iniziale calcolato rispetto alla prima posizione di misura,  $\alpha_{F2}^{piede}$  è il lag calcolato rispetto al piede interno della barriera e  $\Delta X_{mis,p}$  la distanza tra la prima sonda ed il piede interno della struttura. A questo punto definiremo la posizione di un ideale battionde in acque basse (di ascissa  $X_p$  rispetto al riferimento fisso), che produce una sfasamento pari a  $-\pi$  tra le componenti. Si ha:

$$X_p = -\frac{\pi + \alpha_{F2}^{piede}}{k_2 - 2k_1} \quad [6.47]$$

che si ottiene da una relazione analoga alla [6.46]. La Figura 6.44 riassume graficamente le operazioni appena descritte.

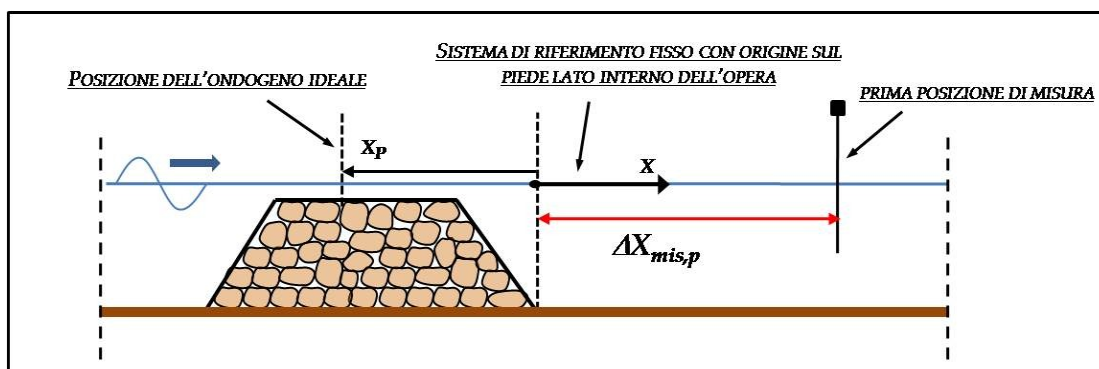


Figura 6.44. Schema grafico del sistema di riferimento adottato per il calcolo del lag di fase iniziale.

La Figura 6.45 propone il rapporto  $X_p/B$  in funzione del parametro di non linearità  $k_s a_{FT}^{(1)}$ , in cui  $k_s$  rappresenta il numero d'onda riferito alla profondità di sommergezza:  $k_s = 2\pi/\sqrt{gR_c T^2}$ .



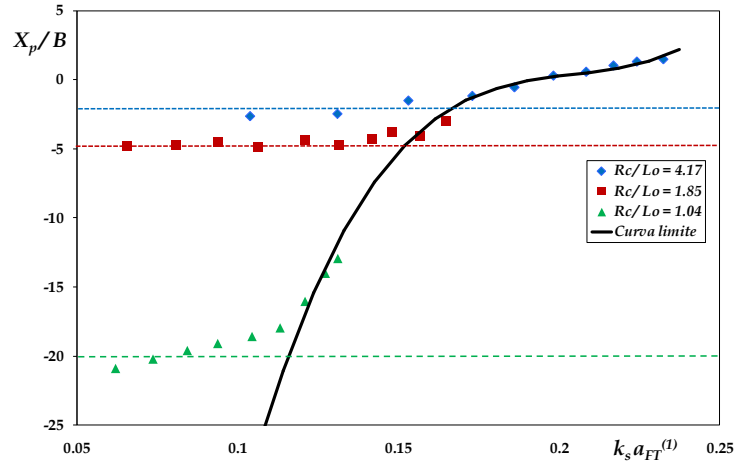


Figura 6.45. Andamento del rapporto  $X_p/B$  in funzione di  $k_s a_{FT}^{(1)}$ .

Il grafico sembra suggerire che per i valori più alti delle ascisse, corrispondenti alle altezze d'onda incidenti maggiori, i dati si dispongano lungo una curva che rappresenta il limite inferiore del rapporto  $X_p/B$  per il valore assegnato di  $k_s a_{FT}^{(1)}$ . Per i valori più piccoli dell'ascissa i dati si distaccano dalla curva tendendo, con ogni probabilità, verso valori asintotici orizzontali. Questi ultimi appaiono più evidenti per i periodi  $T=1s$  ed  $1.5s$ , mentre per  $T=2s$  i punti mostrano ovunque un gradiente positivo.

#### Intensità delle interazioni tra le componenti libere

La Figura 6.46 mostra la potenza della componente trasmessa di interferenza del III ordine, relativa alla potenza media trasmessa, in funzione dell'altezza d'onda relativa  $H_{en,i}/R_c$ . Come atteso il frattile cresce con il periodo, mantenendosi comunque entro limiti contenuti (valori inferiori al 2%).

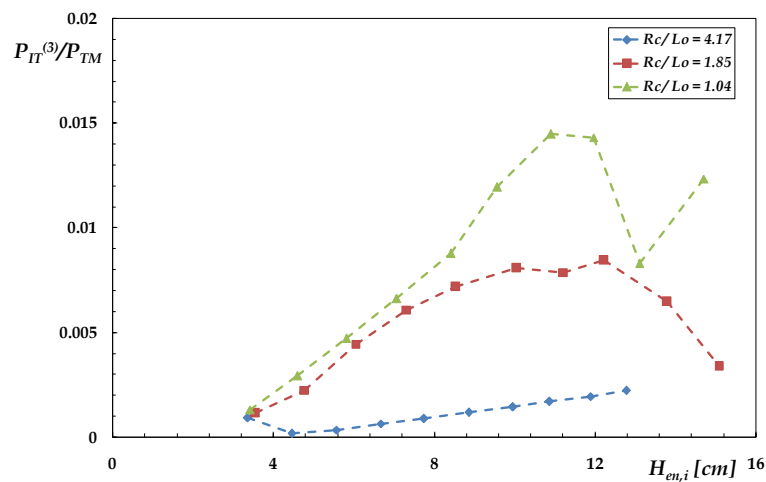


Figura 6.46. Andamento del rapporto  $P_{TT}^{(3)}/P_{TM}$  in funzione di  $H_{en,i}/R_c$ .

### 6.4.3 Barriera omogenea a cresta larga e sommergenza elevata

La configurazione strutturale il cui comportamento viene discusso di seguito, è del tutto equivalente alla precedente, salvo che per l'estensione della cresta; quest'ultima è qui pari ad 80cm in luogo dei 25cm della struttura precedente.

#### Analisi macroscopica dell'interazione con moto ondoso

Per le onde di periodo  $T=1s$ , la transizione "non-frangimento/frangimento" sembra avvenire con maggiore probabilità in corrispondenza di  $H_i=5cm$ , ovvero in ritardo di un'altezza d'onda rispetto alla struttura a cresta stretta. Al fine di approfondire meglio questo aspetto, in Foto 6.11 vengono confrontati, per le due strutture in questione, alcuni fotogrammi significativi relativi ad  $H_i=4cm$ . In effetti, in entrambi i casi sussiste un significativo grado di incertezza riguardo l'occorrenza o meno della rottura; come già riferito in precedenza, la principale sorgente di tale incertezza risiede nella debolezza dello "spil" in corrispondenza della transizione, che rende difficoltoso il proprio riconoscimento ad occhio nudo. D'altra parte la figura sembrerebbe suggerire che, per la struttura a cresta stretta, una volta raggiunto il massimo della ripidità in prossimità dello spigolo interno dell'opera la brusca variazione di fondale favorisca il distacco di un modesto *plunging-jet*. Nel caso della struttura più ampia il profilo ha il tempo di distendersi prima di passare a tergo, e ciò renderebbe il frangimento meno probabile. Infine l'intrinseca aleatorietà del processo di frangimento, in combinazione con i ben noti effetti di risalita del livello medio nell'area protetta [Diskin et al., 1971, Loveless et al. (1998), Calabrese et al. (2003) e Bellotti (2004)] potrebbero costituire delle concause dell'apparente disuniformità.

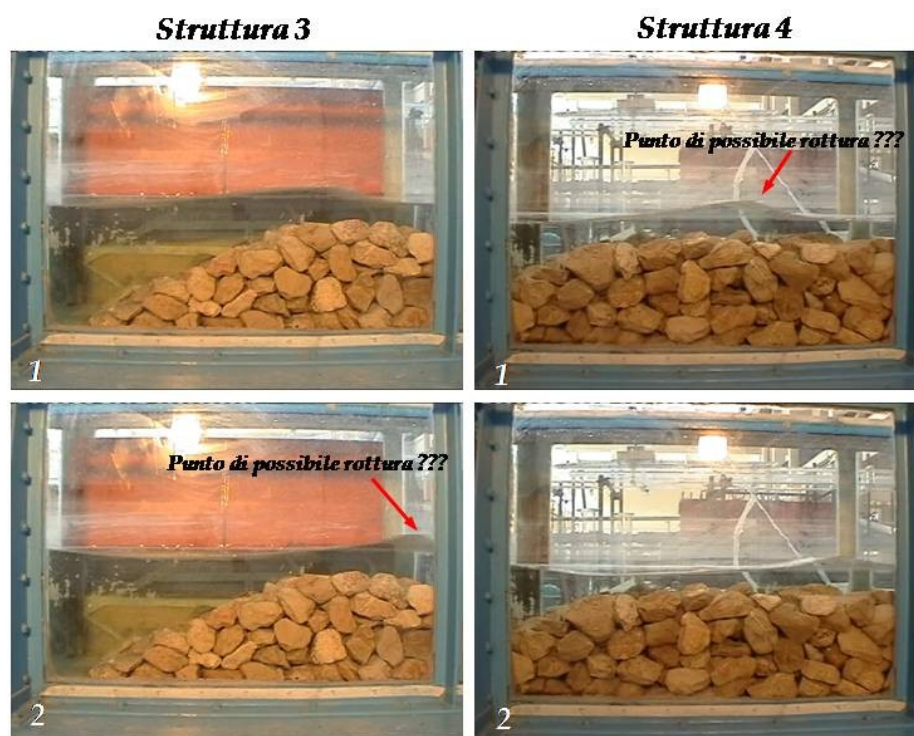


Foto 6.11. Confronto tra due fotogrammi rappresentativi del passaggio dell'onda di altezza  $H_i=4cm$  sulla Struttura 3 e 4.

In ogni modo il frangimento sembra verificarsi in maniera più evidente per  $H_i=5\text{cm}$ . La rottura, come mostrato in Foto 6.12, ha luogo nella parte centrale della cresta con un angolo di *rear-tilt* circa pari a  $77^\circ$ .



Foto 6.12. Frangimento di tipo *Spilling* per test con  $H_i=5\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$ .

Al crescere dell'altezza d'onda i frangimenti divengono chiaramente di tipo *Spilling-Plunging* con una chiara individuazione del *plunging-jet* ed aumento di creazione di schiuma e turbolenza. All'aumentare dell'altezza d'onda il punto di frangimento arretra, passando dalla zona centrale alla prima parte della cresta e giungendo poi, per  $H_i=11\text{cm}$ , all'intersezione tra cresta e paramento lato mare della barriera (Foto 6.13).



Foto 6.13. Sequenze di frangimento per  $H_i=6\text{cm}$ ,  $H_i=8\text{cm}$  ed  $H_i=10\text{cm}$ .



È interessante notare che il “*punto di plunging*”, già definito nel paragrafo precedente, è sempre localizzato chiaramente sulla cresta della barriera. La Foto 6.14. è del tutto simmetrica alla Foto 6.6 e consente il confronto tra le due situazioni. Si noti che per la barriera più ampia non solo il plunging si completa sulla cresta, ma risulta evidente lo “*splash*” conseguente all’impatto del getto sulla superficie libera ed il successivo “punto di splash” anch’esso localizzato sulla cresta

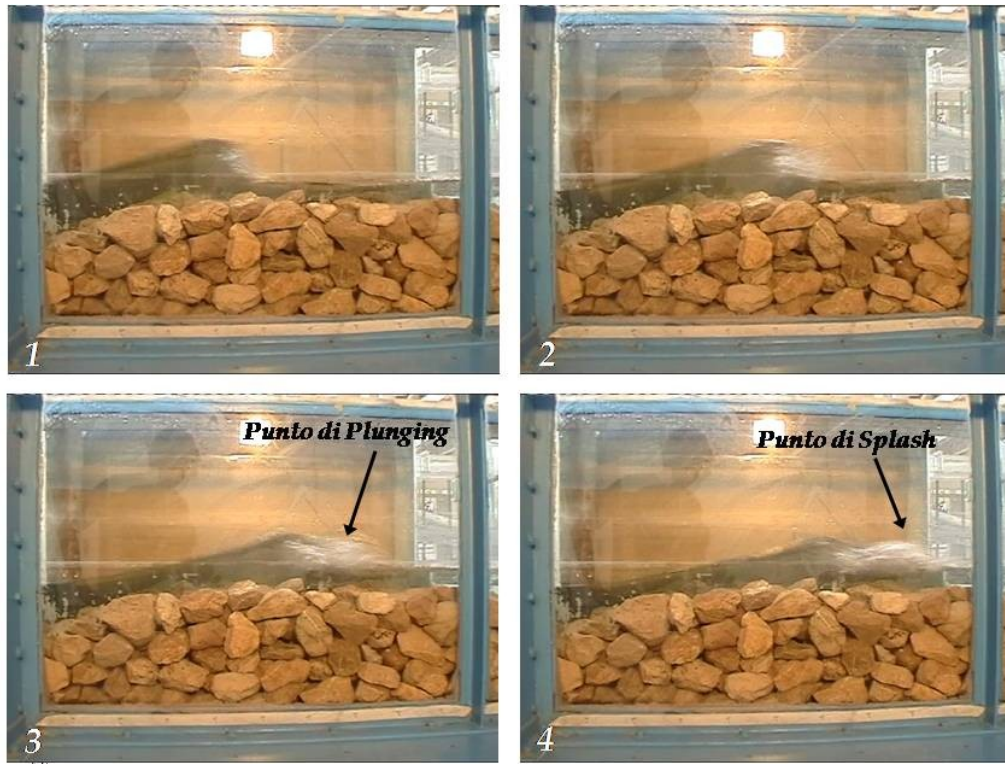


Foto 6.14. Sequenza di frangimento per  $H_i=11cm$ .

Per  $T=1.5s$  l’inizio del frangimento sembrerebbe avvenire per  $H_i=5cm$ , ovvero in corrispondenza della stessa onda incidente relativa alla struttura a cresta stretta. Il meccanismo di rottura è del tutto analogo a quello descritto nel corso del paragrafo precedente, salvo che il punto di frangimento è ubicato, ovviamente, in posizione più arretrata e cioè nella parte centrale del coronamento.

Con l’innescarsi della rottura l’evoluzione del frangimento avviene con la creazione di un getto, debole per l’onda di transizione e difficile da distinguere, ma che cresce in dimensione e potenza con l’altezza d’onda; le tipologie di frangimento possono così collocarsi nell’intervallo [B-S]/[B-P], almeno fino ad  $H_i=10cm$ . Come è in parte documentato in Foto 6.15 il punto di frangimento arretra all’aumentare dell’altezza d’onda ed il “punto di plunging” è sempre localizzato sulla cresta della barriera.

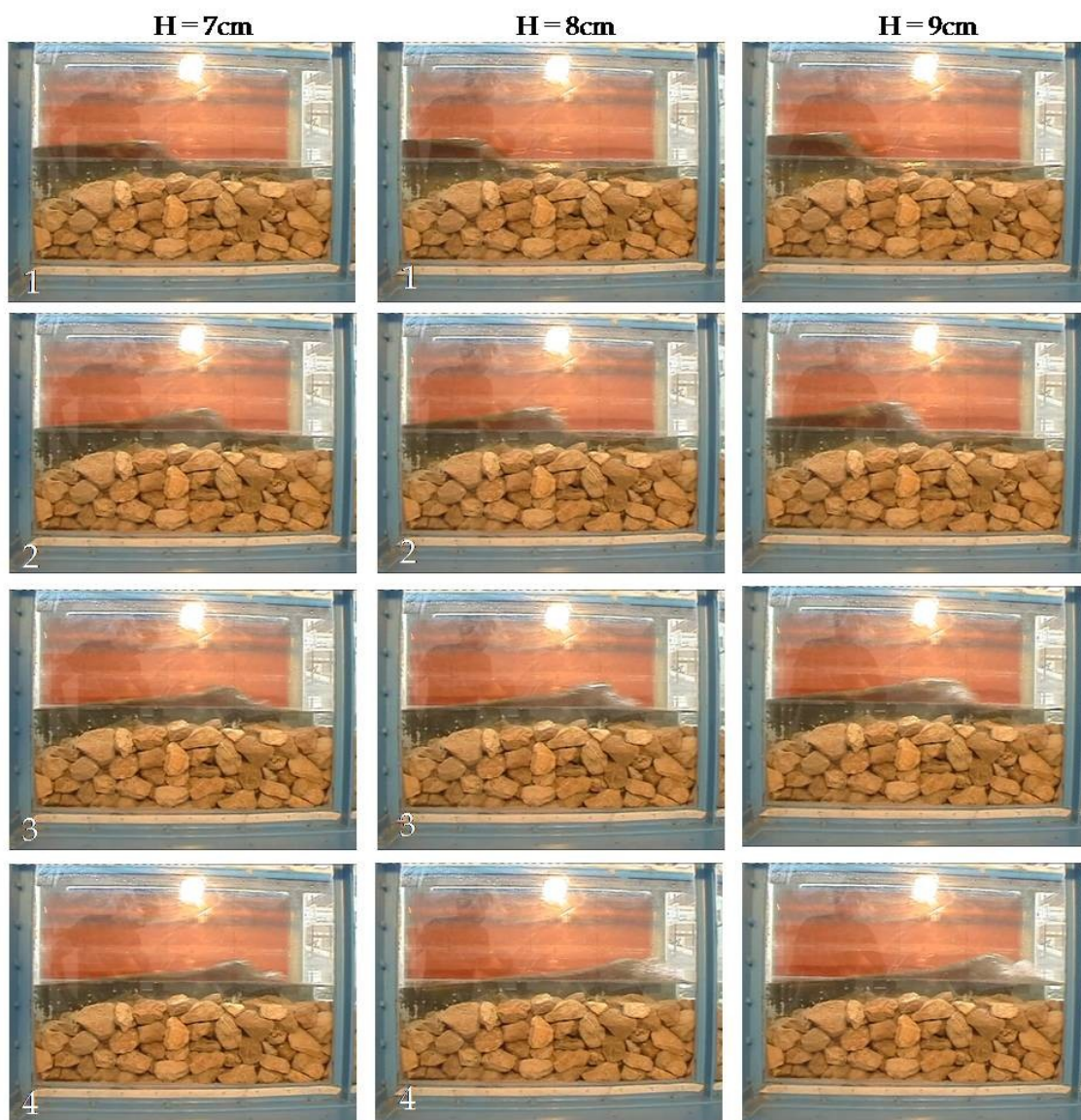


Foto 6.15. Sequenze di frangimento per  $H_i=7\text{cm}$ ,  $H_i=8\text{cm}$  e  $H_i=9\text{cm}$ .

A partire da  $H_i=11\text{cm}$  la rottura dell'onda avviene con frangimento di tipo *Collapsing*; nella Foto 6.16 è possibile notare come la formazione del getto sia accompagnata da un angolo di *rear-tilt* maggiore di  $90^\circ$ . Passando dai fotogrammi 1 e 2 è, infine, possibile rilevare un modesto innalzamento del pelo libero in corrispondenza del piedritto del telaio del canale, a testimonianza che il *plunging-jet* è localizzato appena sotto la cresta. La successiva evoluzione del frangimento è di tipo *Plunging* con “*punto di plunging*” localizzato sulla cresta della struttura.



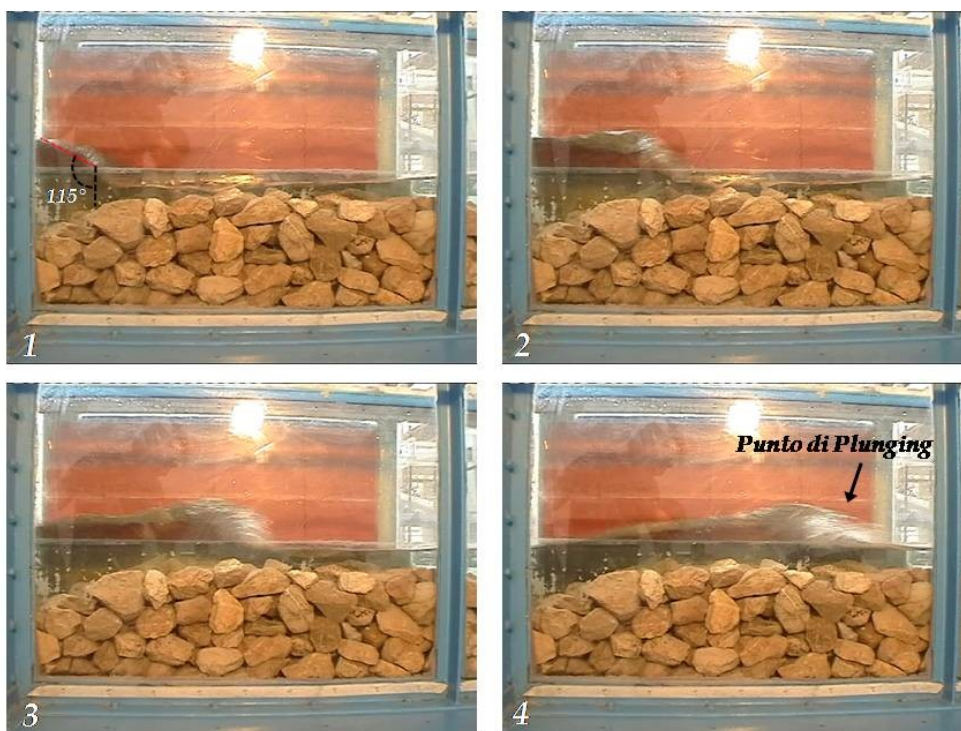


Foto 6.16. Sequenza di frangimento per  $H_i=11\text{cm}$ .

Per quanto riguarda le onde con periodo  $T=2\text{s}$ , la transizione “non-frangimento/frangimento” avviene in corrispondenza di  $H_i=6\text{cm}$ , vale a dire con un anticipo di una altezza d’onda rispetto al caso di struttura a cresta stretta. La presenza di un piccolo *plunging-jet* che dà luogo ad un frangimento di tipo *Spilling* nella parte terminale del coronamento è chiaramente visibile dalla Foto 6.17.



Foto 6.17. Frangimento di tipo *Bore* per test con  $H_i=6\text{cm}$  e  $T=2\text{s}$ .

D’altro canto nella Foto 6.18 è riportato il confronto tra i fotogrammi corrispondenti relativi alle due strutture per  $H_i=6\text{cm}$ . Sembra evidente che, per la struttura a cresta stretta il frangimento non si verifichi sulla sezione dell’opera, sebbene non si possa escludere che una piccola rottura abbia avuto luogo nell’area protetta.

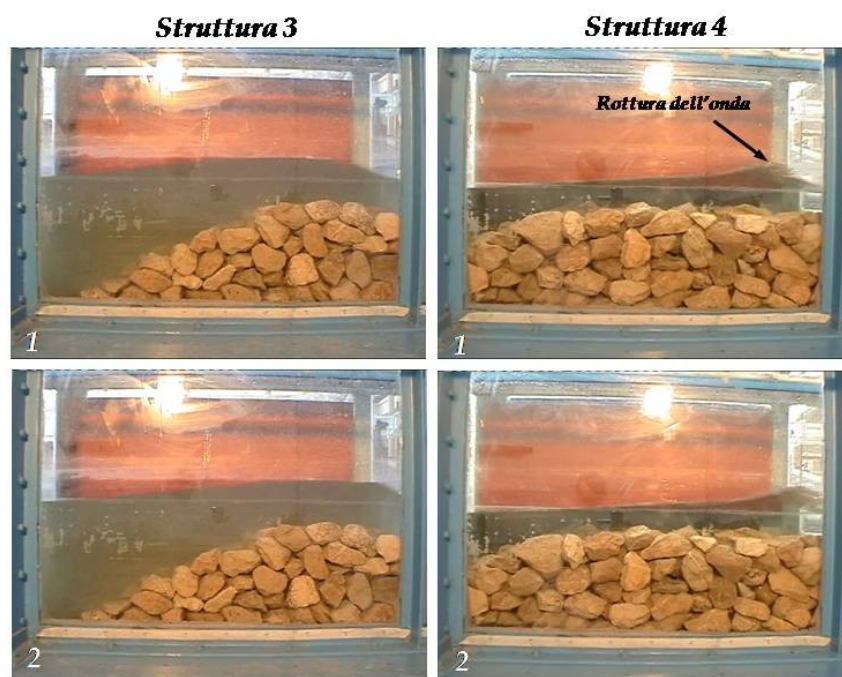


Foto 6.18. Confronto tra due fotogrammi rappresentativi del passaggio dell'onda di altezza  $H_i=6\text{cm}$  sulla Strutturata 3 e 4.

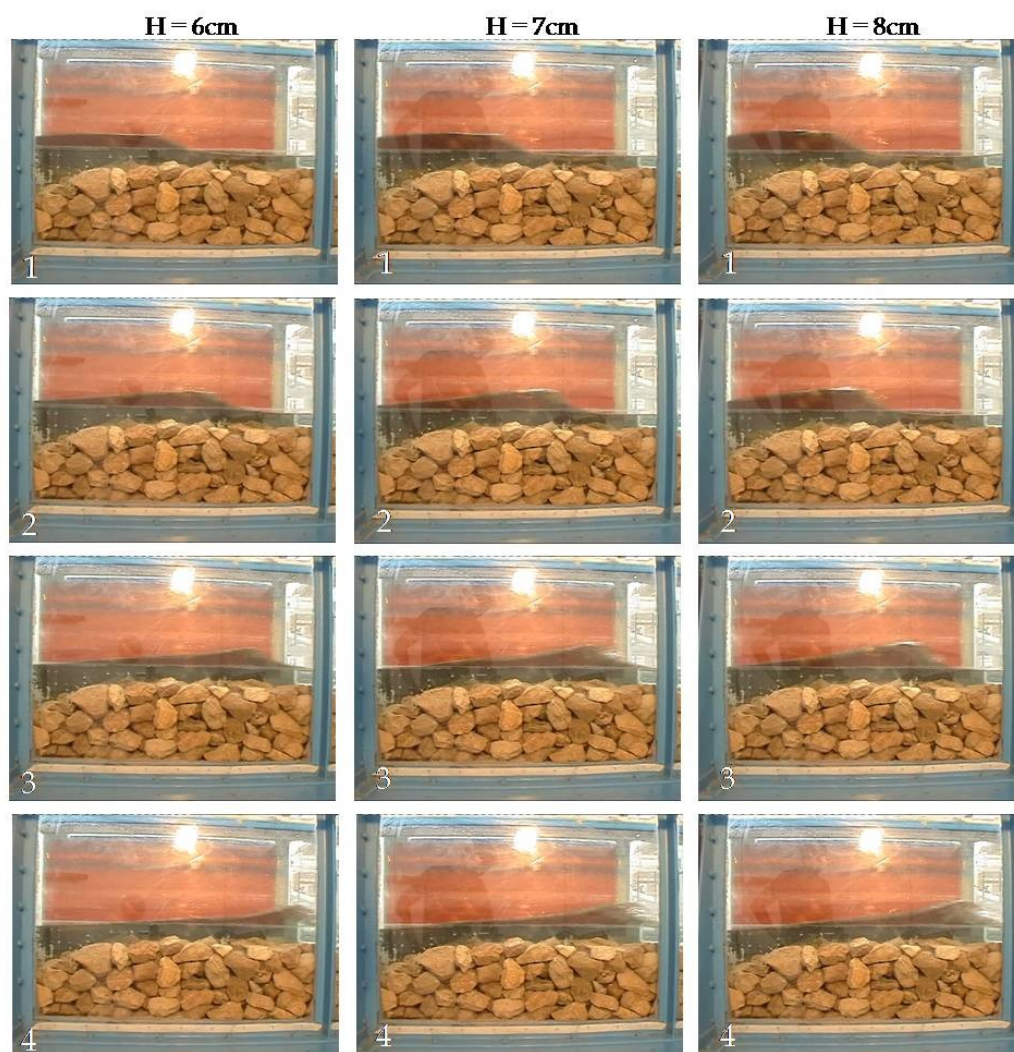


Foto 6.19. Sequenze di frangimento *Bore-Plunging* per  $H=6\text{cm}$ ,  $H=7\text{cm}$  e  $H=8\text{cm}$ .



Da  $H_i=7\text{cm}$  fino ad  $H_i=9\text{cm}$ , lo svilupparsi del frangimento avviene con tipologia [S-P]. Per l'“onda di transizione” il *jet-plunging* è modesto ed il punto di plunging è localizzato nella parte terminale della cresta della barriera (quasi in corrispondenza del paramento interno). Al crescere dell'altezza d'onda la potenza del getto aumenta e tanto il punto di frangimento quanto il punto di plunging arretrano, sebbene in maniera modesta (Foto 6.19).

A partire da  $H_i=10\text{cm}$  i frangimenti diventano più propriamente di tipo *Plunging* con punto di plunging situato nella seconda parte della cresta. La Foto 6.20 mostra alcuni passaggi del processo di rottura per  $H_i=11\text{cm}$ . Se si confronta la Foto 6.20 con la 6.10, sebbene quest'ultima sia riferita all'altezza d'onda  $H_i=10\text{cm}$ , si nota chiaramente come il profilo libero diventi più regolare nel caso di struttura lunga con la scomparsa della doppia gibbosità presente, invece, nel caso di struttura stretta.



Foto 6.20. Sequenze di frangimento *Plunging* per  $H=11\text{cm}$ .

La Tabella 6.III fornisce il quadro riassuntivo dell'analisi discussa per la Struttura 4.

<b>h = 31.5 cm</b>		<b>T=1s</b>		<b>T=1.5s</b>		<b>T=2s</b>	
<b>Test</b>	<b>H (cm)</b>	<b>Frangimento</b>	<b>Punt.Frang</b>	<b>Frangimento</b>	<b>Punt.Frang</b>	<b>Frangimento</b>	<b>Punt.Frang</b>
<b>1</b>	<b>3</b>	NO		NO		NO	
<b>2</b>	<b>4</b>	NO		NO		NO	
<b>3</b>	<b>5</b>	SI [S]	m.crest	SI [B-S]	m.crest	NO	
<b>4</b>	<b>6</b>	SI [S-P]	m.crest	SI [B-S]	m.crest	SI [S]	in.crest
<b>5</b>	<b>7</b>	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [S-P]	m.crest
<b>6</b>	<b>8</b>	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [S-P]	m.crest
<b>7</b>	<b>9</b>	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [S-P]	m.crest
<b>8</b>	<b>10</b>	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [P]	m.crest
<b>9</b>	<b>11</b>	SI [S-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope	SI [P]	m.crest
<b>10</b>	<b>12</b>	SI [S-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope	SI [P]	out.crest

Tabella 6.III. Quadro riassuntivo delle caratteristiche macroscopiche di interazione onda-barriera (Struttura 4).



### Analisi del moto ondoso trasmesso

Le Figure da 6.47 ed 6.48 mostrano l'andamento delle componenti fondamentali trasmesse sia in termini assoluti, in funzione di  $H_{en,i}$ , sia in termini relativi, in funzione di  $H_{en,i}/R_c$ , e relativamente alle due strutture con  $B=25cm$  e  $B=80cm$ .

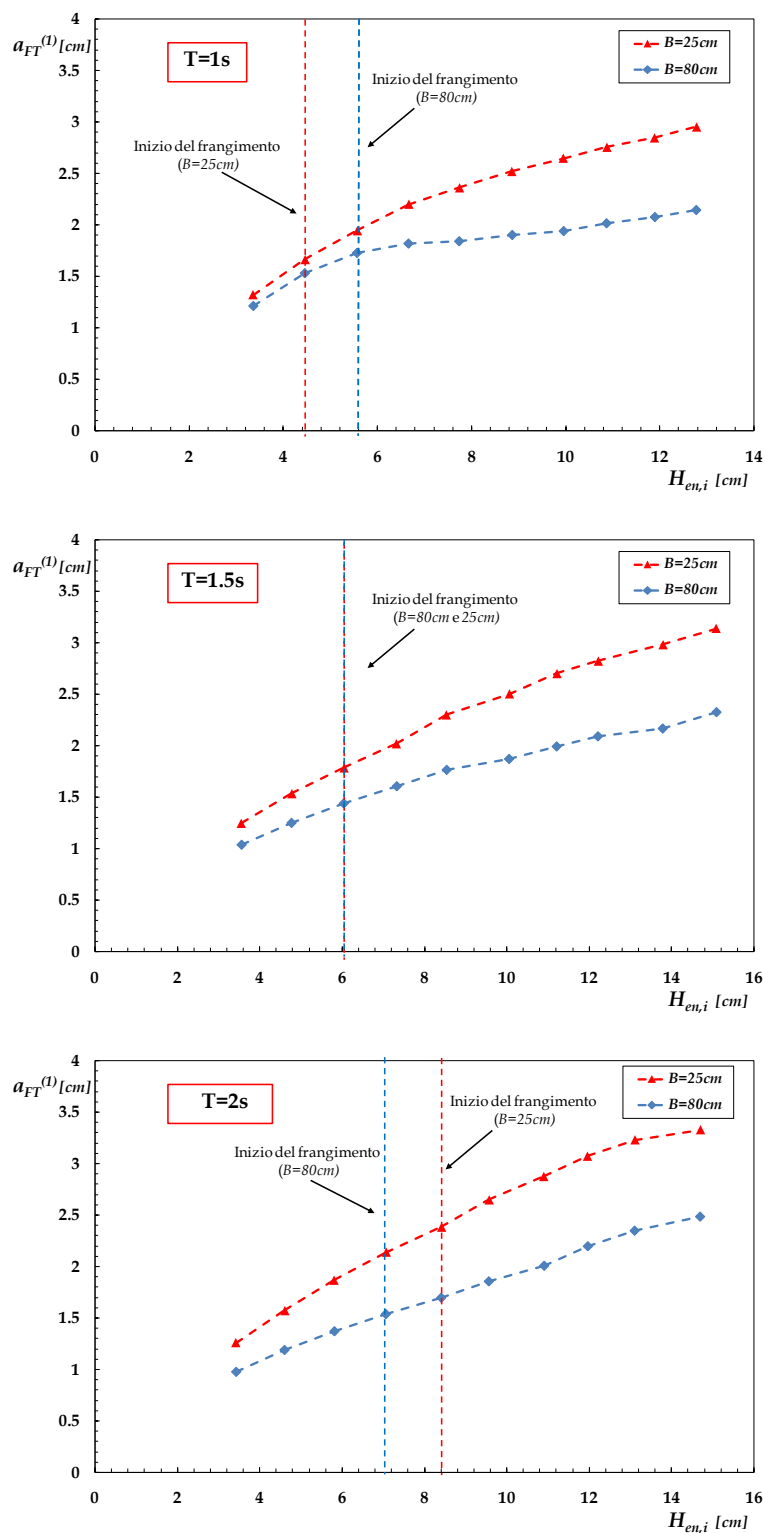


Figura 6.47. Andamento di  $a_{FT}^{(1)}$  in funzione dell'altezza d'onda incidente.

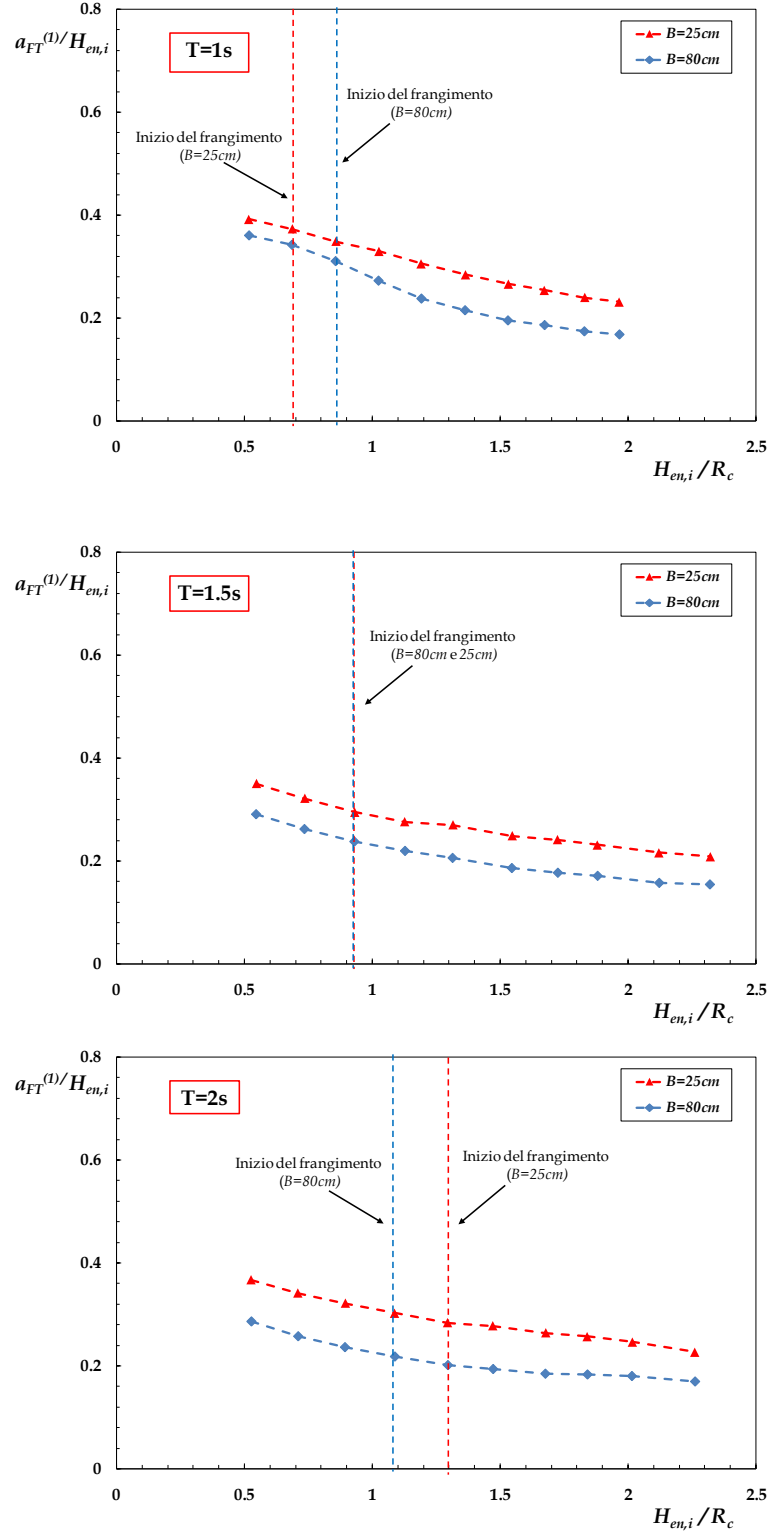


Figura 6.48. Andamento del rapporto  $a_{FT}^{(1)}/H_{en,i}$  in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente.

L'andamento dei dati sperimentali può essere spiegato mediante alcune ovvie considerazioni di carattere fisico. Al crescere della larghezza del coronamento l'ampiezza trasmessa del primo ordine si riduce, per un assegnato periodo  $T$ , soprattutto per effetto delle dissipazioni imposte dall'opera al moto ondoso, potendosi

ritenere ragionevolmente trascurabili gli effetti dell'altezza d'onda sul coefficiente di riflessione.

Prima del frangimento le dissipazioni sembrano relativamente modeste e sono connesse soprattutto ai processi di filtrazione che dipendono direttamente da  $B$ . Con il verificarsi del frangimento l'effetto di dissipazione diviene più intenso e le curve di Figura 6.47 tendono progressivamente a divaricarsi. Tale andamento è evidente in maniera particolare per  $T=1s$ , con i dati sperimentali relativi alla struttura più lunga che sembrano attingere una sorta di valore asintotico.

In ogni caso è interessante sottolineare che in nessuno degli esperimenti qui discussi è stato rilevato un andamento decrescente dell'ampiezza fondamentale trasmessa in termini assoluti.

I grafici di Figura 6.48 sono conseguenza diretta degli andamenti appena descritti e rivelano, come già commentato nel paragrafo precedente, che il tasso di crescita di  $a_{FT}^{(1)}$  è inferiore a quello di  $H_{en,i}$ .

La Figura 6.49 mostra l'andamento delle componenti libere del secondo ordine in termini assoluti. La caratteristica peculiare dei grafici è quella di mostrare una sorta di valore asintotico di  $a_{FT}^{(2)}$  (valore di saturazione indicato con un segmento punteggiato nelle figure), cui i dati tendono dopo l'occorrenza del frangimento.

La dipendenza di tale valore asintotico dalla larghezza della struttura non è in realtà ben chiaro; tale aspetto verrà commentato ulteriormente nel seguito di questo paragrafo adoperando un differente approccio.

Prima del frangimento, il valore comparato dell'ampiezza libera della seconda armonica dipende probabilmente dalle dissipazioni subite da questa componente per effetto della filtrazione; così un parametro importante può divenire il prodotto  $k_2 B$ : quanto più questo è grande maggiore sarà l'effetto della dissipazione, in quanto le onde più corte risentono maggiormente della laminazione indotta dal flusso attraverso il corpo dell'opera. Di conseguenza nel caso  $T=1s$  l'ampiezza della seconda super-armonica libera si riduce bruscamente passando dalla cresta stretta alla cresta ampia, mentre per i periodi più lunghi tale differenziale è più ridotto. Si noti che per  $T=1.5s$ ,  $a_{FT}^{(2)}$ , prima del frangimento, è lievemente maggiore per  $B=80cm$ ; al momento la personale convinzione di chi scrive è che questo risultato sia legato principalmente alla metodologia di stima delle ampiezze piuttosto che a ragioni di carattere fisico. Sono in corso, in ogni caso, maggiori approfondimenti.

Nonostante gli andamenti precedenti possano risultare in qualche modo complessi, è interessante sottolineare come il grafico delle ampiezze relative  $a_{FT}^{(2)}/H_{en,i}$  risulti di più immediata interpretazione (Figura 6.50); infatti i rapporti sembrano raggiungere un massimo in prossimità della transizione "non-frangimento/frangimento" per poi progressivamente decrescere.

L'andamento delle componenti libere di pulsazione  $3\omega$  sono in definitiva affini a quelli sin qui commentati e pertanto, non aggiungendo apparentemente alcuna informazione, sono stati omessi per ragioni di sintesi.

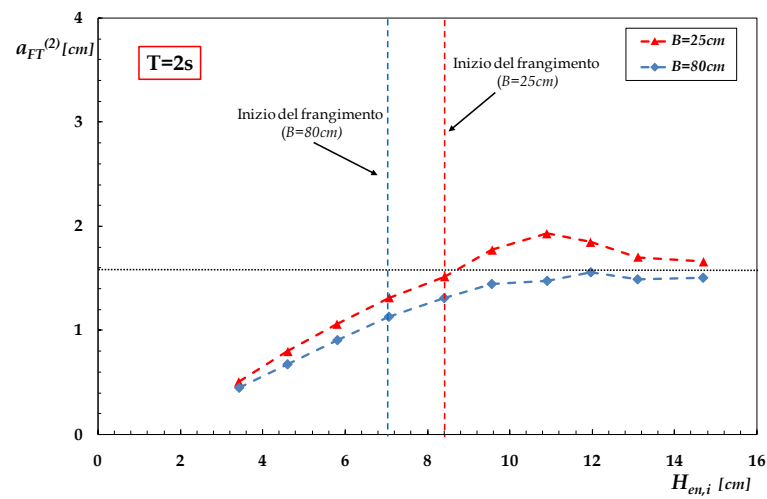
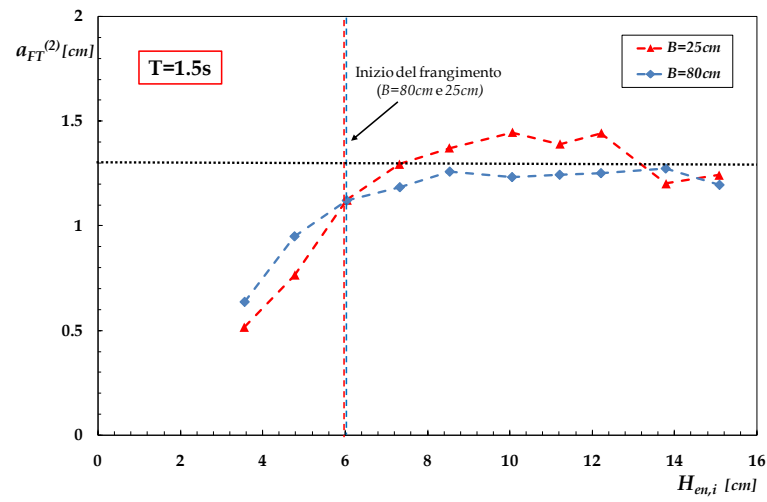
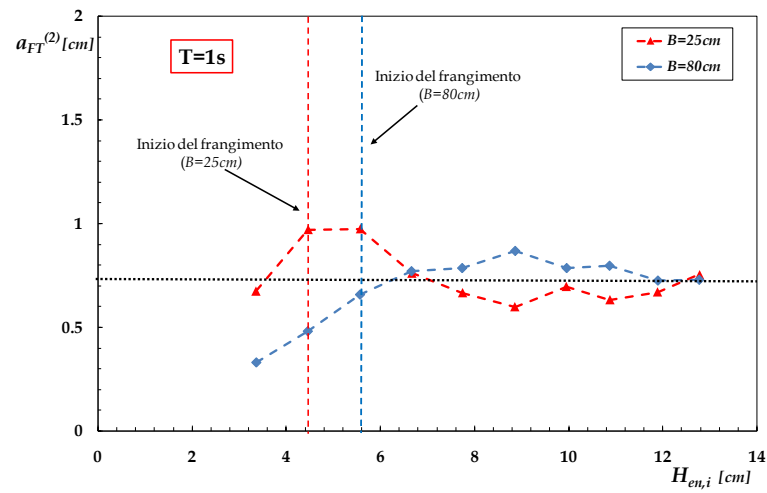


Figura 6.49. Andamento di  $a_{FT}^{(2)}$  in funzione dell'altezza d'onda incidente.

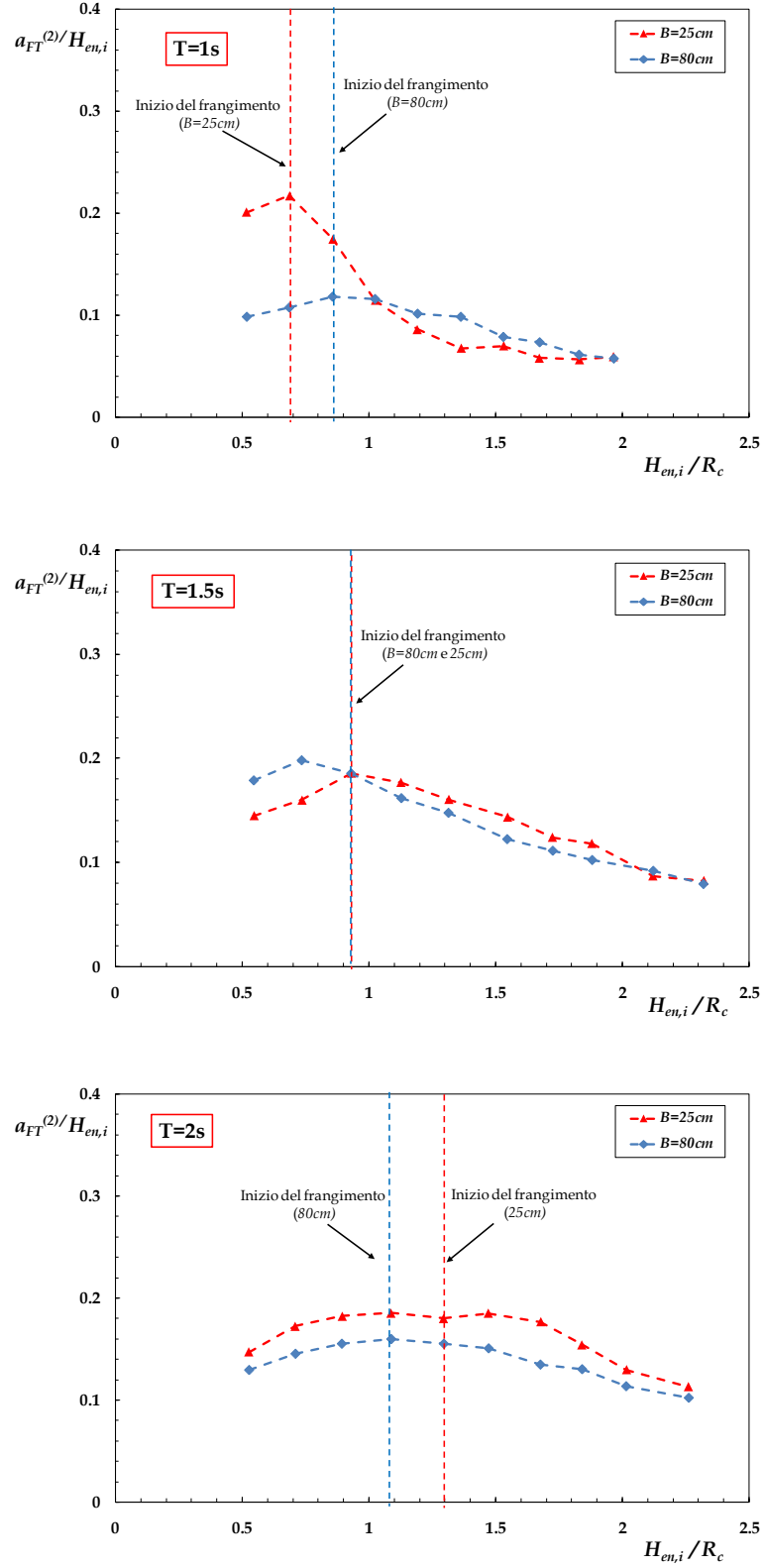


Figura 6.50. Andamento del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/H_{en,i}$  in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente.

È interessante commentare l'andamento delle ampiezze delle componenti super-armoniche libere, rapportate alla fondamentale, in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente (Figure 6.51). Tali rapporti, infatti, misurano in qualche modo il grado di non

linearità del campo ondoso trasmesso. Nei grafici, le transizioni “non-frangimento/frangimento” sono indicate con opportune frecce.

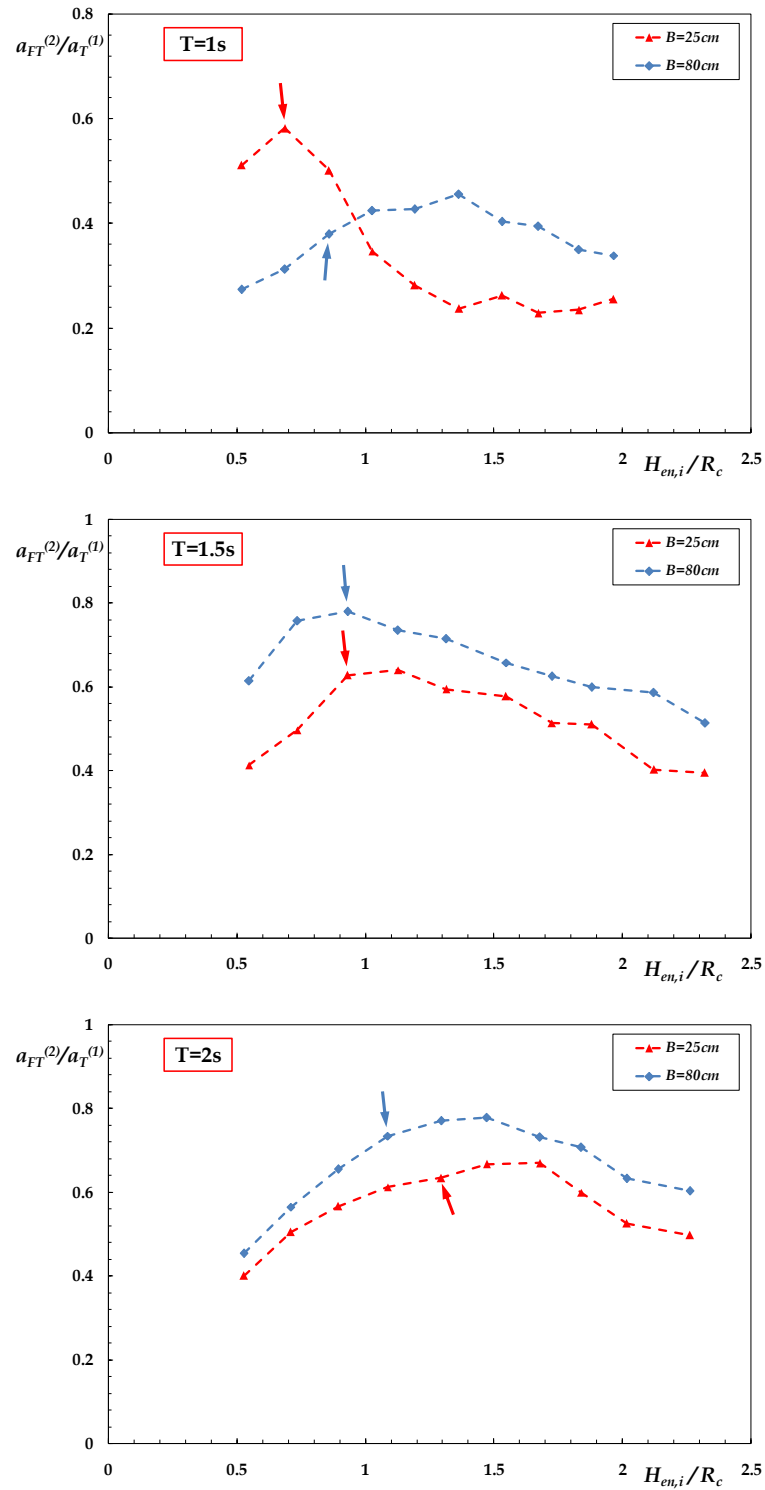


Figura 6.51. Ampiezza dell’armonica libera di pulsazione  $2\omega$  rapportata alla fondamentale in funzione dell’altezza d’onda relativa incidente.

Le figure mostrano come l’aumento della larghezza del coronamento si accompagni generalmente ad un aumento del tasso di non-linearità. Quando le onde frangono sulla

struttura, ciò sembrerebbe indicare che la dissipazione lamini maggiormente le componenti del I ordine rispetto a quelle del II ordine. Ciò sembra coerente con la impostazione introdotta da Dally, Dean e Dalrymple (1985) nello studio della dissipazione di energia dei frangenti sulle spiagge. Secondo gli Autori, infatti, il tasso di dissipazione medio per unità di area di un'onda frangente è proporzionale al flusso di energia dell'onda ed inversamente proporzionale alla profondità del fondale sul quale essa evolve. Poiché sulla cresta dell'opera si attingono comunque le condizioni di acque basse si potrebbero scrivere le seguenti equazioni approssimate di bilancio dell'energia:

$$\begin{cases} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x} \cong -\beta \frac{1}{2} a_{FT}^{(1)} \frac{\sqrt{gR_c}}{R_c} \\ \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x} \cong -\beta \frac{1}{2} a_{FT}^{(2)} \frac{\sqrt{gR_c}}{R_c} \end{cases} \quad [6.48]$$

in cui  $\beta$  è un fattore di dissipazione non necessariamente uguale per i due casi. In definitiva, secondo l'equazione precedente, poiché l'ampiezza del primo ordine è maggiore di quella del secondo, il tasso di riduzione per frangimento nel primo caso sarà maggiore rispetto al secondo.

In ogni caso la maggiore non linearità della struttura a cresta larga si conserva in tutto il campo di altezza per  $T=1.5s$  e  $2s$ , mentre per  $T=1s$  si assiste ad una inversione, verosimilmente generata dall'effetto della dissipazione per filtrazione descritto in precedenza.

Nelle Figure 6.52 ed 6.53 sono riportati i fattori di proporzionalità  $b_{F2}$  e  $b_{F3}$  calcolati mediante la [6.44]. Anche per questi grafici si assiste all'attingimento di valori di saturazione sostanzialmente coerenti per i tre periodi. Tuttavia la curva limite così individuata appare lievemente diversa per  $B=80cm$  rispetto a  $B=25cm$ ; la curva di saturazione per la struttura a coronamento stretto è riportata nei grafici in forma interpolare polinomiale per favorire il confronto. Vi è tuttavia una maggiore coerenza nel caso delle componenti libere del III ordine che sono riportate in Figura 6.53 nel consueto piano semi-logaritmico.

Come già commentato nel paragrafo precedente prima del frangimento, o lievemente dopo di esso, i dati sperimentali riportati sui piani delle Figure 6.52 ed 6.53 sembrerebbero disporsi lungo segmenti orizzontali in corrispondenza dei quali la struttura risponde al moto ondoso incidente proprio come un battitore a pistone con movimento sinusoidale. Nei grafici, i valori asintotici per  $B=25cm$  sono riportati mediante segmenti orizzontali a tratto. È possibile notare come per la struttura più ampia i valori limite si dispongano superiormente a tali segmenti ribadendo la maggiore non linearità del moto ondoso trasmesso al crescere di  $B$ . Naturalmente ciò non vale per  $T=1s$ , a causa probabilmente degli effetti dissipativi dovuti alla filtrazione di cui si è discusso ampiamente in precedenza.

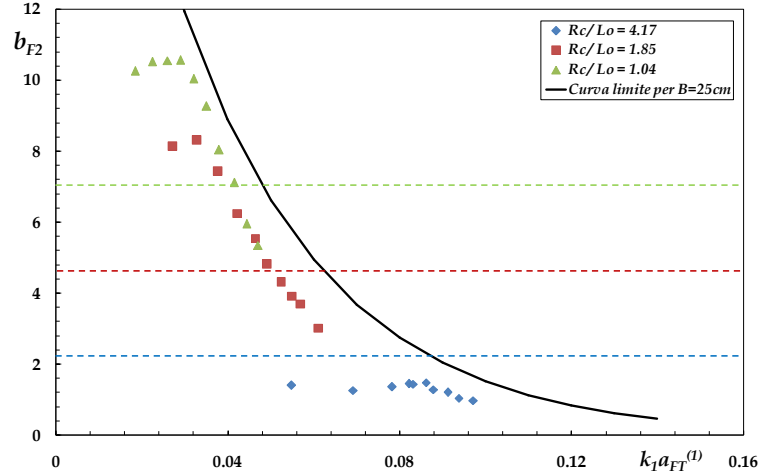


Figura 6.52. Fattore di proporzionalità  $b_{F2}$  in funzione della ripidità dell'onda trasmessa del I ordine.

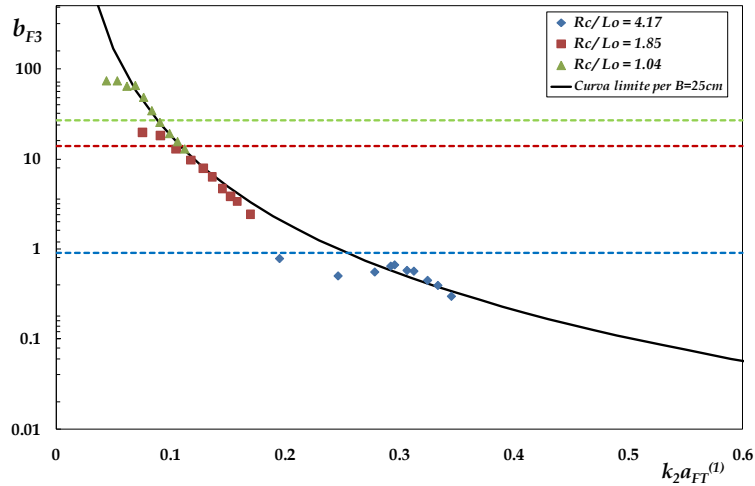


Figura 6.53. Fattore di proporzionalità  $b_{F3}$  in funzione di  $k_2 a_{FT}^{(1)}$ .

#### Lag di fase iniziale tra le componenti trasmesse del I e del II ordine

Nel grafico 6.54 sono riportati i valori del rapporto  $X_p/B$ , che rappresentano lo shift di fase iniziale tra la componente principale e la seconda super-armonica libera. La curva continua riportata in figura rappresenta il valore di saturazione delle fasi come riscontrato per  $B=25cm$  nella Figura 6.45.

I dati relativi alla struttura larga sono sostanzialmente coerenti con quelli discussi nel corso del paragrafo precedente, sebbene i valori asintotici degli shift di fase sembrano decrescere con continuità al crescere di  $B$ . Si nota, inoltre, che i bassi valori della componente principale trasmessa, connessi evidentemente all'aumento delle dissipazioni dovute all'incremento del coronamento, mantengano i dati sperimentali sostanzialmente costanti.



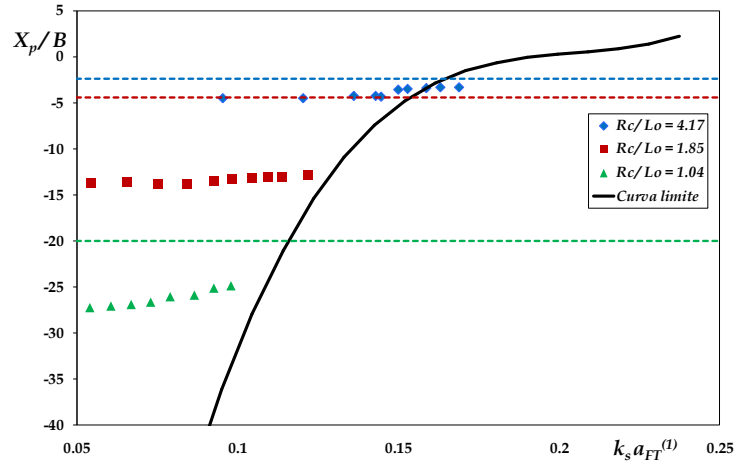


Figura 6.54. Andamento del rapporto  $X_p/B$  in funzione di  $k_s a_{FT}^{(1)}$ .

#### Intensità delle interazioni tra le componenti libere

La Figura 6.55 mostra la potenza della componente trasmessa di interferenza del III ordine, relativa alla potenza media trasmessa, in funzione dell'altezza d'onda relativa  $H_{en,i}/R_c$ . In ciascun grafico sono confrontati i risultati per le due strutture sin qui esaminate, mantenendo il periodo costante. La Figura sembra indicare che solo per  $T=1s$  un aumento dell'ampiezza del coronamento determina una riduzione "sensibile" (si è comunque in presenza di valori molto piccoli) della componente di interferenza; ciò probabilmente avviene perché la riduzione di  $a_{FT}^{(1)}$  per effetto dell'aumento di  $B$  determina, in presenza di un periodo breve, una drastica riduzione della non linearità dell'onda principale (riduzione del numero di Ursell  $a_{FT}^{(1)}/k_1^2 h^3$ ).

Negli altri casi l'effetto di  $B$  non appare così evidente. In ogni caso i frattili di potenza associati alle componenti di interferenza non superano 0.02.

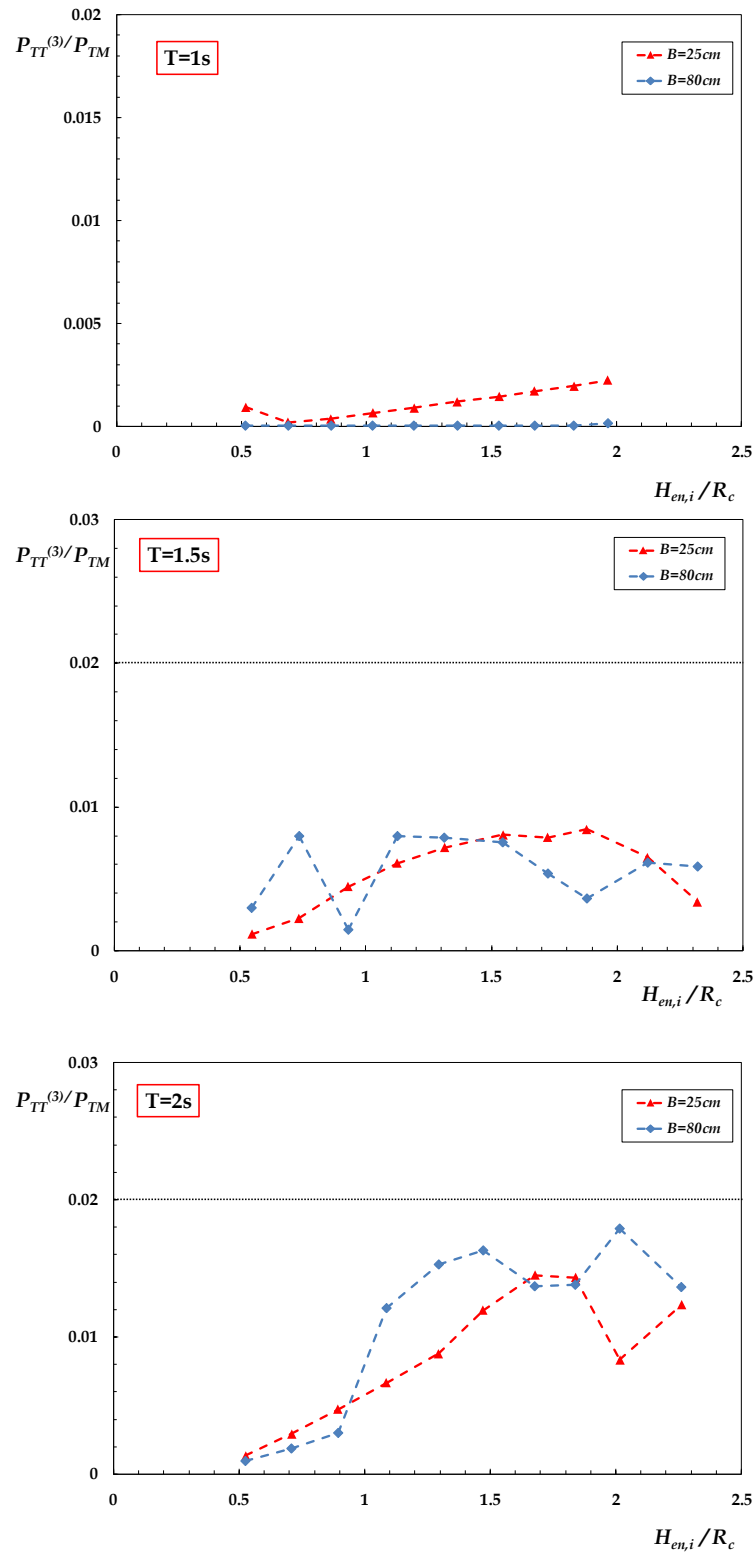


Figura 6.55. Andamento del rapporto  $P_{TT}^{(3)}/P_{TM}$  in funzione di  $H_{en,i}/R_c$ .

#### 6.4.4 L'effetto della presenza del nucleo sull'interazione onda-struttura

Le configurazioni strutturali qui discusse sono del tutto corrispondenti alle due appena descritte ( $B=25\text{cm}-R_c=6.5\text{cm}$  e  $B=80\text{cm}-R_c=6.5\text{cm}$ ; pendenza lato mare 1:2) salvo per la presenza di un nucleo di ridotta granulometria ( $D_{50} = 2\text{cm}$ ) all'interno del corpo dell'opera.

Nei paragrafi che seguono si tenterà dunque di studiare l'effetto del "multi-layering" (struttura zonata contro struttura omogenea), sebbene, come vedremo, il confronto di dettaglio è talvolta complicato dalla difficoltà di riprodurre esattamente lo stesso profilo strutturale, specie riguardo la disposizione e l'orientamento dei massi di mantellata.

##### Analisi macroscopica dell'interazione con moto ondoso

Le Tabelle 6.IV e 6.V propongono la sintesi delle caratteristiche della interazione onda-struttura quanto ad occorrenza e tipologia del frangimento. Per facilitare il confronto vengono, inoltre, di nuovo mostrate le Tabelle 6.II ed 6.III.

h = 31.5 cm		T=1s		T=1.5s		T=2s	
Test	H (cm)	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang
1	3	NO		NO		NO	
2	4	SI [S-P]	in.crest	NO		NO	
3	5	SI [S-P]	in.crest	SI [B-S]	in.crest	NO	
4	6	SI [S-P]	in.crest	SI [B-S]	in.crest	NO	
5	7	SI [S-P]	in.crest	SI [B-S]	m.crest	SI [B-P]	in.crest
6	8	SI [S-P]	m.crest	SI [B-S]	m.crest	SI [B-P]	in.crest
7	9	SI [S-P]	m.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [P]	in.slope
8	10	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [P]	in.slope
9	11	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [P]	in.slope
10	12	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [P]	in.slope

Tabella 6.II. Barriera omogenea con  $B=25\text{cm}$  ( $R_c = 6.5\text{cm}$ ).

h = 31.5 cm		T=1s		T=1.5s		T=2s	
Test	H (cm)	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang
1	3	NO		NO		NO	
2	4	NO		NO		NO	
3	5	SI [S]	m.crest	SI [B-S]	m.crest	NO	
4	6	SI [S-P]	m.crest	SI [B-S]	m.crest	SI [S]	in.crest
5	7	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [S-P]	m.crest
6	8	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [S-P]	m.crest
7	9	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [S-P]	m.crest
8	10	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [P]	m.crest
9	11	SI [S-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope	SI [P]	m.crest
10	12	SI [S-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope	SI [P]	out.crest

Tabella 6.III. Barriera omogenea con  $B=80\text{cm}$  ( $R_c = 6.5\text{cm}$ ).

h = 31.5 cm		T=1s		T=1.5s		T=2s	
Test	H (cm)	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang
1	3	NO		NO		NO	
2	4	SI (S-P)	in.crest	NO		NO	
3	5	SI (S-P)	in.crest	SI [B-S]	m.crest	NO	
4	6	SI (S-P)	in.crest	SI [B-S]	m.crest	SI [S]	in.crest
5	7	SI (S-P)	m.crest	SI [B-S]	m.crest	SI (S-P)	out.crest
6	8	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	m.crest	SI (S-P)	out.crest
7	9	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	m.crest	SI (S-P)	out.crest
8	10	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI (S-P)	out.crest
9	11	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope
10	12	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope

Tabella 6.IV. Barriera con nucleo e  $B=25\text{cm}$  ( $R_c = 6.5\text{cm}$ ).

h = 31.5 cm		T=1s		T=1.5s		T=2s	
Test	H (cm)	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang
1	3	NO		NO		NO	
2	4	SI [S-P]	m.crest	NO		NO	
3	5	SI [S-P]	m.crest	SI [S-P]	m.crest	SI [S-P]	in.crest
4	6	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [S-P]	m.cresta
5	7	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [C-P]	out.crest
6	8	SI [S-P]	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [C-P]	out.crest
7	9	SI [S-P]	out.crest	SI [C-P]	out.crest	SI [C-P]	out.crest
8	10	SI [S-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope	SI [C-P]	out.crest
9	11	SI [S-P]	out.slope	SI [C-P]	out.slope	SI [C-P]	out.crest
10	12	SI [S-P]	out.slope	SI [C-P]	out.slope	SI [C-P]	out.crest

Tabella 6.V. Barriera con nucleo e  $B=80\text{cm}$  ( $R_c = 6.5\text{cm}$ ).

La lettura propone immediatamente tre aspetti di rilievo:

- per la struttura a cresta stretta la presenza del nucleo sembrerebbe non influenzare la transizione “non-frangimento/frangimento”, salvo che per il periodo  $T=2\text{s}$ ;
- per la struttura a cresta ampia, al contrario, il frangimento in presenza di nucleo sembrerebbe anticipato in due casi su tre;
- in presenza del periodo  $T=2\text{s}$  per la struttura a cresta stretta, e  $T=1.5\text{s}$  e  $2\text{s}$  per la struttura a cresta larga, sembrerebbero aver luogo dei frangimenti di tipo *Collapsing* non rilevati nel caso di struttura omogenea.

Di seguito ciascuno dei punti precedenti verrà singolarmente discusso.

Le Foto 6.21 ed 6.22 si riferiscono rispettivamente alle altezze d’onda di target  $H_i=3\text{cm}$  e  $4\text{cm}$ , per  $T=1\text{s}$  e struttura a cresta stretta. I dati si trovano perciò a cavallo della transizione stimata mediante analisi video.



Foto. 6.21. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=3\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$  ( $B=25\text{cm}$ ).



Foto. 6.22. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=4\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$  ( $B=25\text{cm}$ ).

Le foto sembrano indicare che nel passaggio sulla cresta dell'opera le onde attingano approssimativamente la stessa ripidità, probabilmente a testimonianza di un'influenza non significativa della presenza del nucleo nella transizione "non-frangimento/frangimento".

I fotogrammi 6.23 ed 6.24 sono analoghi ad i precedenti, ma si riferiscono al periodo  $T=1.5\text{s}$ . Essi sostanzialmente conducono alle stesse conclusioni, sebbene in Foto 6.24 lo "spill" appaia lievemente più pronunciato.



Foto. 6.23. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=4\text{cm}$  e  $T=1.5\text{s}$  ( $B=25\text{cm}$ ).





Foto. 6.24. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=5\text{cm}$  e  $T=1.5\text{s}$  ( $B=25\text{cm}$ ).

La Foto 6.25 si riferisce ad  $H_i=6\text{cm}$  e  $T=2\text{s}$ . Qui la presenza di frangimento nella struttura zonata appare evidente, sia dalla maggiore ripidità dell'onda sia (e soprattutto) dalla presenza, abbastanza evidente, di un *plunging-jet* sulla cresta del flutto.



Foto. 6.25. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=6\text{cm}$  e  $T=2\text{s}$  ( $B=25\text{cm}$ ).

Le Foto 6.26-6.28 si riferiscono invece alla struttura a cresta larga. Nel caso di periodo  $T=1\text{s}$ , l'anticipo del frangimento ad  $H_i=4\text{cm}$  per struttura zonata è testimoniato in Foto 6.26 dalla maggiore ripidità dell'onda, sebbene il *plunging-jet* non sia probabilmente riconoscibile a causa della scalatura del fotogramma. D'altro canto per  $H_i=5\text{cm}$  (Foto 6.27), lo "spray" è molto più evidente nel caso di struttura con nucleo, mentre esso è appena riconoscibile ad occhio nudo nel caso di struttura omogenea. È tuttavia evidente che il risultato appena descritto possa essere stato influenzato dalla presenza di una singolarità nella cresta rappresentata da un masso orientato in maniera difforme nelle due strutture e tale da ridurre localmente il tirante per la struttura con nucleo. L'elemento di roccia determina un chiaro effetto instabilizzante, come testimoniato anche dalla Foto 6.28, che si riferisce a  $T=1.5\text{s}$  ed  $H_i=4\text{cm}$ . Qui sebbene non si determini frangimento è chiaramente visibile una perturbazione del profilo in forma di cresta secondaria.



Foto. 6.26. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=4\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$  ( $B=80\text{cm}$ ).



Foto. 6.27. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=5\text{cm}$  e  $T=1\text{s}$  ( $B=80\text{cm}$ ).



Foto. 6.28. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=4\text{cm}$  e  $T=1.5\text{s}$  ( $B=80\text{cm}$ ).

D'altra parte l'anticipo del frangimento sembrerebbe di carattere più strutturale per  $T=2\text{s}$  (in accordo con quanto già visto per la struttura a cresta stretta). Nella Foto 6.29 ( $H_i=6\text{cm}$ ) l'onda sulla cresta si trova in condizione di frangimento incipiente per la struttura omogenea, mentre per la struttura zonata il getto plunging è abbastanza evidente e possiede una quantità di moto decisamente maggiore. In conclusione l'effetto del nucleo sembrerebbe tradursi in un anticipo della rottura solo per i valori più alti del periodo.





Foto. 6.29. Confronto tra barriera omogenea e con nucleo per  $H_i=6\text{cm}$  e  $T=2\text{s}$  ( $B=80\text{cm}$ ).

La presenza di *Collapsing* in corrispondenza dello spigolo lato mare delle opere zonate potrebbe essere spiegato da un aumento di riflessione, che causerebbe la rottura prima che la cresta dell'onda raggiunga la sommità dell'opera. La Foto 6.30 mostra due esempi nei quali la presenza di rottura è abbastanza evidente nei fotogrammi di sinistra, mentre è assente in quelli di destra.

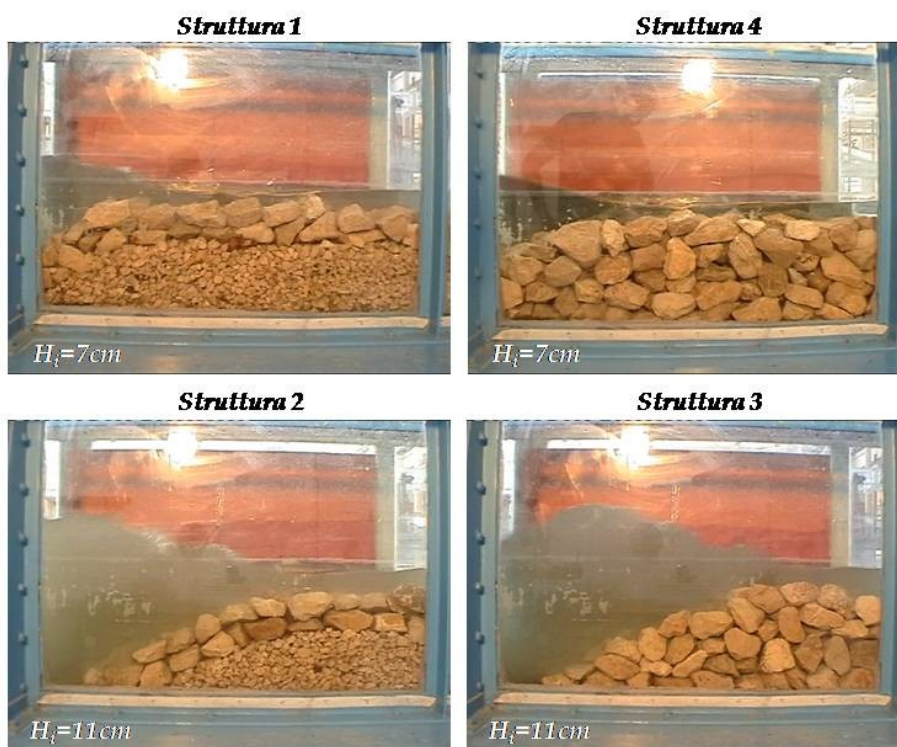


Foto 6.30. Confronto tra i fotogrammi di frangimento per strutture con nucleo (sinistra) ed omogenee (destra).

Accanto agli aspetti precedentemente discussi, una ulteriore peculiarità delle strutture zonate sembra quella di imporre al moto ondoso incidente un frangimento più intenso e dunque una maggiore dissipazione di energia. Ciò è in parte testimoniato dalla Foto 6.31 che confronta gli "splash" generati in corrispondenza di  $H_i=9\text{cm}$ ,  $10\text{cm}$  ed  $11\text{cm}$ , per  $T=1\text{s}$ . Nel caso di struttura con nucleo, gli "splash" sono più evidenti a testimonianza di una maggiore quantità di moto dei *plunging-jet* che li hanno generati.





Figura 6.31. Confronto tra le intensità del frangimento su barriere con nucleo e barriere omogenee per  $H_i=9\text{cm}$ ,  $H_i=10\text{cm}$  ed  $H_i=11\text{cm}$  ( $T=1\text{s}$ ).

Per quel che riguarda la sezione di inizio frangimento, non è stata riscontrata alcuna tendenza sistematica; tuttavia è interessante sottolineare che, in alcuni casi, il punto di frangimento per la struttura zonata è apparso spostato verso largo rispetto al caso di struttura omogenea, mentre il caso contrario non è stato mai osservato.

#### Analisi del moto ondoso trasmesso

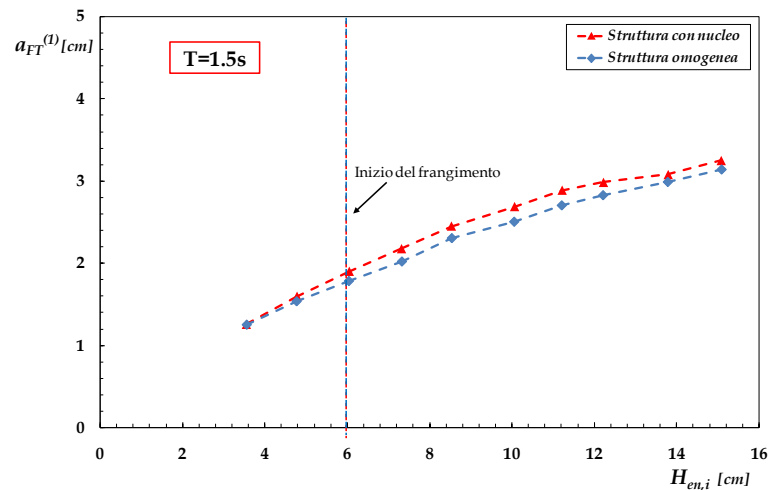
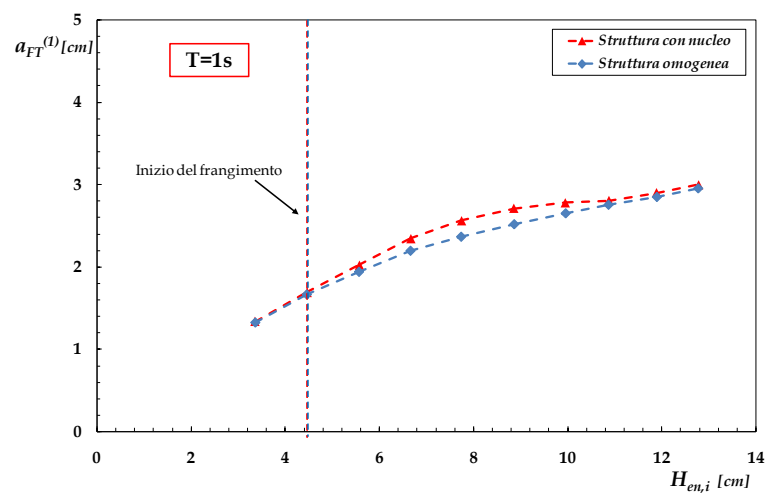
La risposta delle strutture nucleate, quando confrontate con quelle omogenee, è condizionata dai seguenti aspetti, in parte contrastanti:

- 1) la minore permeabilità della struttura induce una maggiore quantità di fluido a tracimare la cresta; poiché il processo di tracimazione è meno dissipativo di quello di filtrazione l'effetto complessivo sarà quello di aumentare la trasmissione;

- 2) il frangimento più intenso determina una maggiore dissipazione di energia che, a parità di ogni altro fattore, riduce la trasmissione.

In linea generale i punti 1) e 2) tendono a compensarsi in grande media, cosicché l'effetto complessivo non è mai troppo significativo.

Più in particolare, riguardo l'ampiezza libera del primo ordine, l'effetto del maggiore *overtopping* è prevalente per le strutture a cresta stretta (Figura 6.56); al contrario, nel caso di frangiflutti con coronamento ampio, il processo dominante è quello del frangimento (Figura 6.57). Di conseguenza, almeno per le altezze d'onda incidenti maggiori,  $a_{FT}^{(1)}$  sarà maggiore per strutture con nucleo nel caso di berme contenute ed inferiore per barriere a cresta larga.



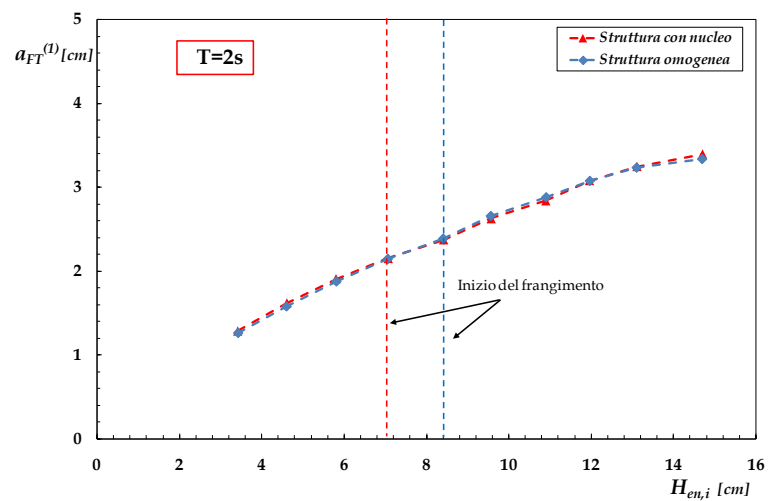
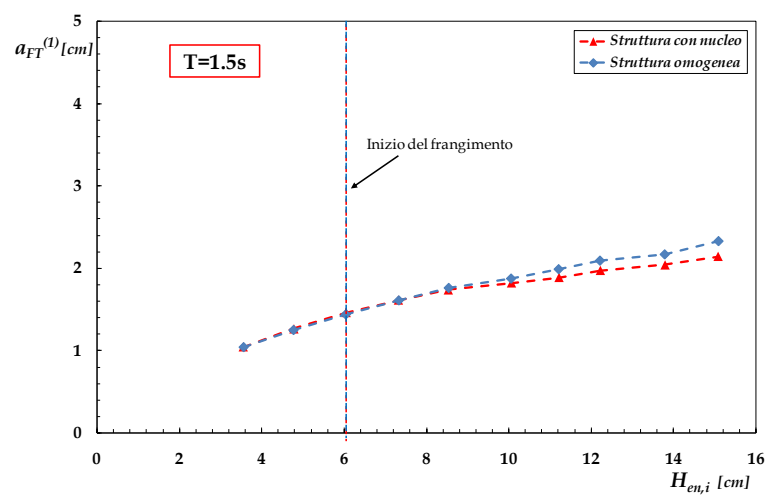
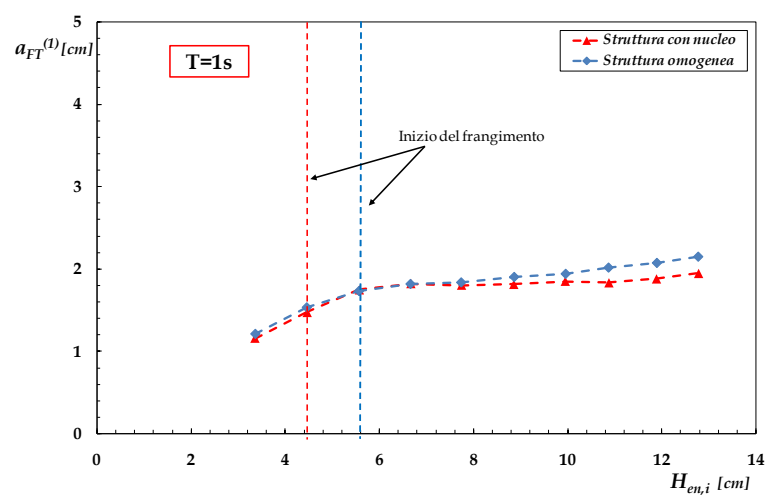


Figura 6.56. Andamento di  $a_{FT}^{(1)}$  in funzione di  $H_{en,i}$  per barriera a cresta stretta.



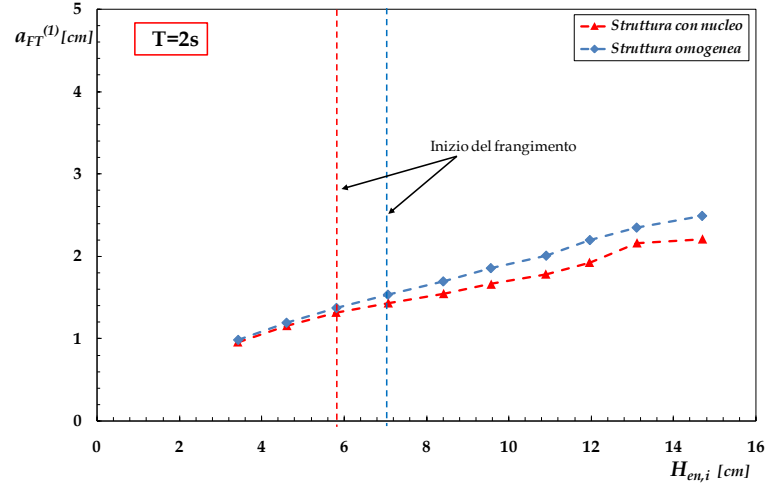


Figura 6.57. Andamento di  $a_{FT}^{(1)}$  in funzione di  $H_{en,i}$  per barriere a cresta larga.

D'altro canto per l'ampiezza della seconda super-armonica libera, l'effetto prevalente del nucleo è quello di una riduzione del fondale effettivo sul quale l'onda si propaga, effetto che tende ad incrementare  $a_{FT}^{(2)}$ . L'andamento delle ampiezze del terzo ordine appare chiaramente coerente con quelle del II ordine solo nel caso di periodo  $T=2s$ , mentre per  $T=1s$  e  $1.5s$  l'effetto è alquanto confuso. Ad ogni modo vi è da considerare che le  $a_{FT}^{(3)}$  misurate sono alquanto piccole, il che rende incerta la stima e, di conseguenza, l'analisi dei risultati.

Le Figure 6.58 e 6.59 sono di carattere più generale e testimoniano dell'effetto globalmente non macroscopico dovuto alla presenza del nucleo. Infatti, i valori di  $b_{F2}$  e  $b_{F3}$  non sono, quanto a valori di saturazione, così lontani dai polinomi interpolari relativi alle strutture omogenee e rappresentati nei grafici mediante curve continue. Lo scarto maggiore si osserva per  $b_{F3}$  e per  $T=1s$ , in specie per la struttura a cresta stretta.

Anche per i valori asintotici, in cui i punti sperimentali si dispongono approssimativamente orizzontali ricordando il funzionamento di un battitore a pistone in campo non lineare, è necessaria qualche osservazione. Per quanto riguarda  $b_{F2}$ , nel caso di struttura a cresta stretta (Figura 6.58a), i valori asintotici (presunti) sembrano in tutti i casi ragionevolmente prossimi a quelli corrispondenti alle strutture omogenee, indicati nei grafici mediante segmenti tratteggiati. Per  $B=80cm$ , invece, i valori asintotici sembrano disporsi a livelli più alti rispetto alle strutture omogenee, così testimoniando un maggiore tasso di non linearità del moto ondoso trasmesso (Figura 6.59a). Peraltro, la similitudine con il battitore a pistone non sembrerebbe coerente con l'andamento dei punti per  $T=2s$ .

Le considerazioni precedenti appaiono confermate, per altro verso, dalle Figure 6.60 e 6.61, che riportano i rapporti  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$  in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente.

Quanto a  $b_{F3}$  la Figura 6.58b mostra, per  $T=1.5s$  e  $2s$ , tassi (asintotici) di non linearità maggiori per le strutture nucleate rispetto a quelle omogenee. Quanto a  $T=1s$ , il risultato è inverso, probabilmente a causa delle più intense dissipazioni sperimentate da queste onde, che sono assai corte e dunque più sensibili alla presenza della struttura.

L'effetto dissipativo più importante imposto dalla struttura a cresta larga (Figura 6.59b) tende ad uniformare la risposta delle strutture per i differenti periodi; cosicché i valori asintotici divengono più prossimi a quelli relativi a barriera omogenea.

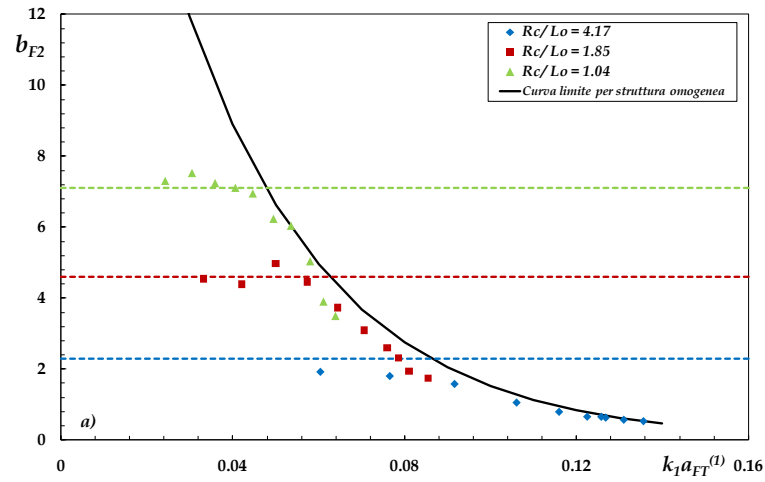


Figura 6.58a. Fattore di proporzionalità  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$  [ $B=25\text{cm}$ ].

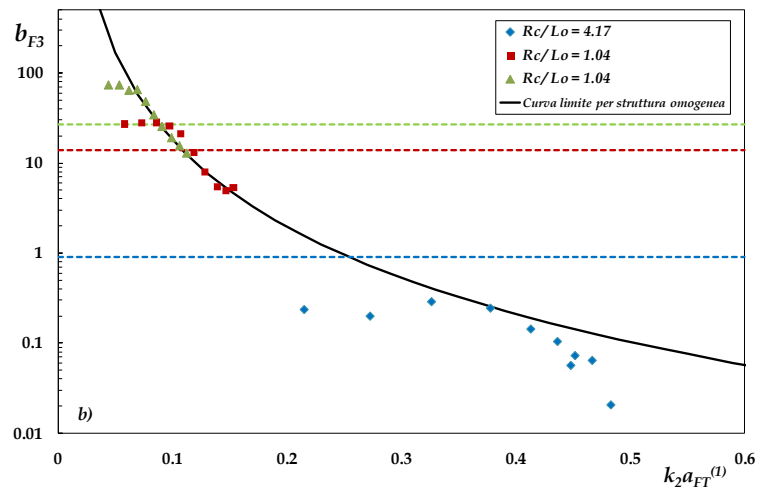


Figura 6.58b. Fattore di proporzionalità  $b_{F3}$  in funzione di  $k_2 a_{FT}^{(1)}$  [ $B=25\text{cm}$ ].

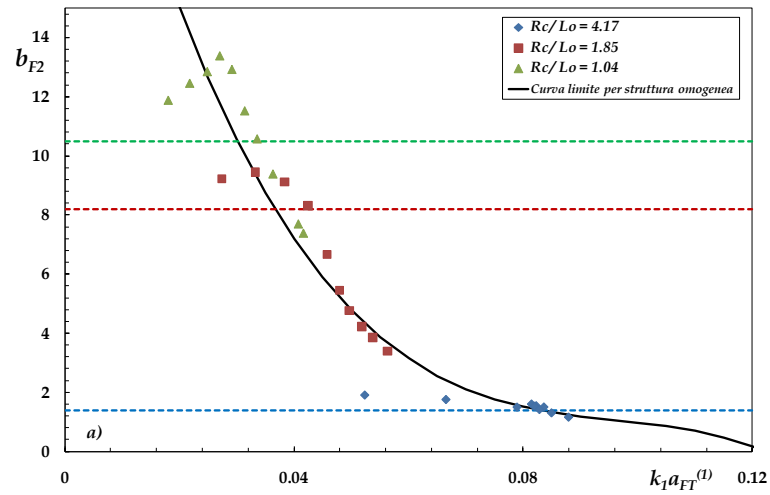


Figura 6.59a. Fattore di proporzionalità  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$  [ $B=80cm$ ].

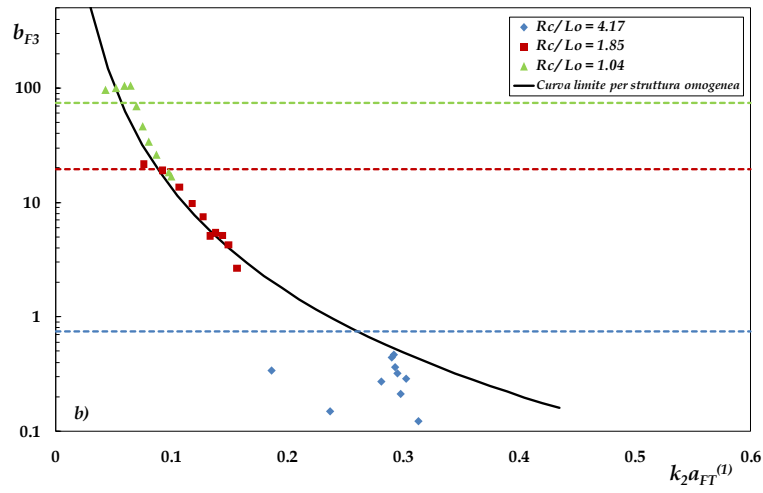


Figura 6.59b. Fattore di proporzionalità  $b_{F3}$  in funzione di  $k_2 a_{FT}^{(1)}$  [ $B=80cm$ ].

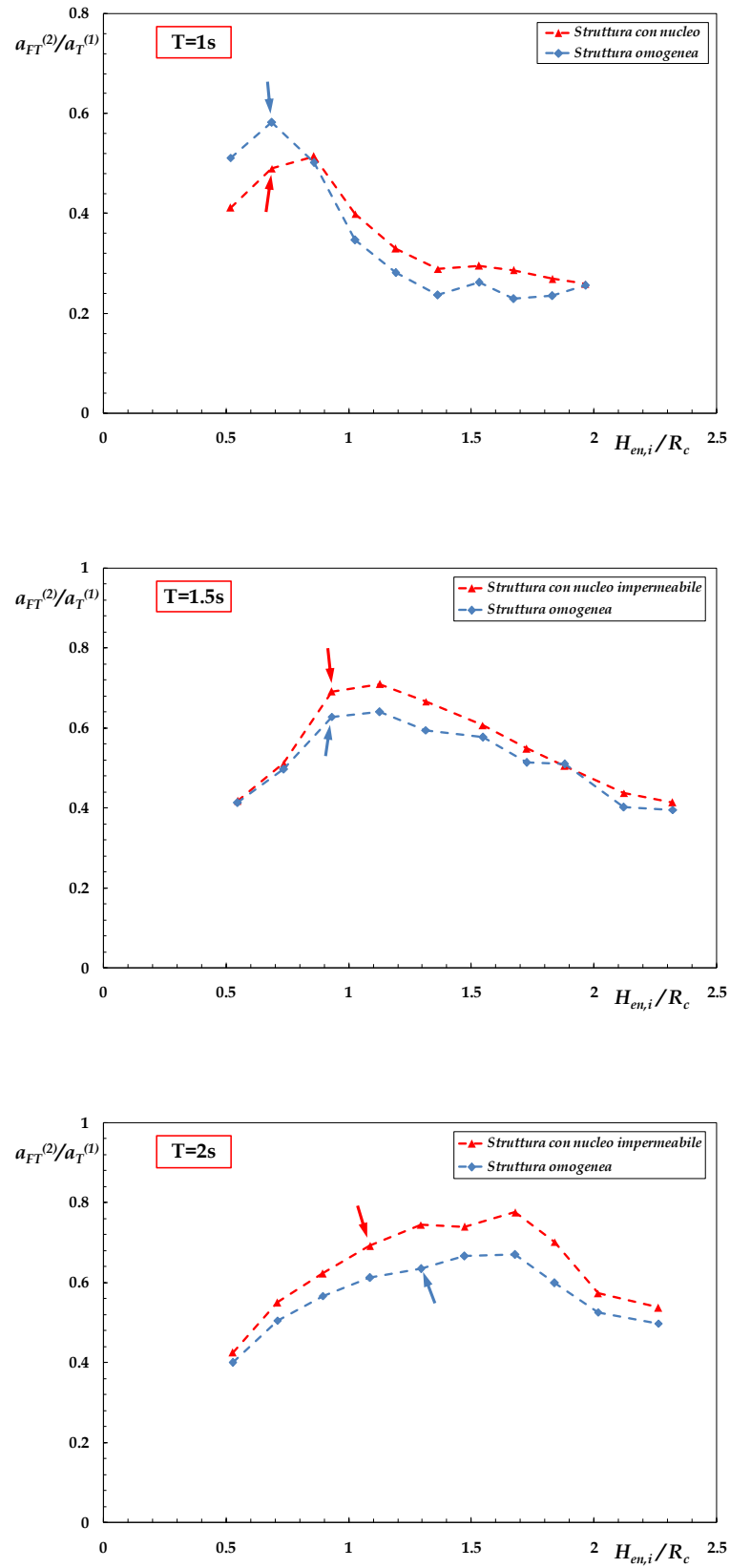


Figura 6.60. Ampiezza dell'armonica libera di pulsazione  $2\omega$  rapportata alla fondamentale in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente [ $B=25cm$ ].

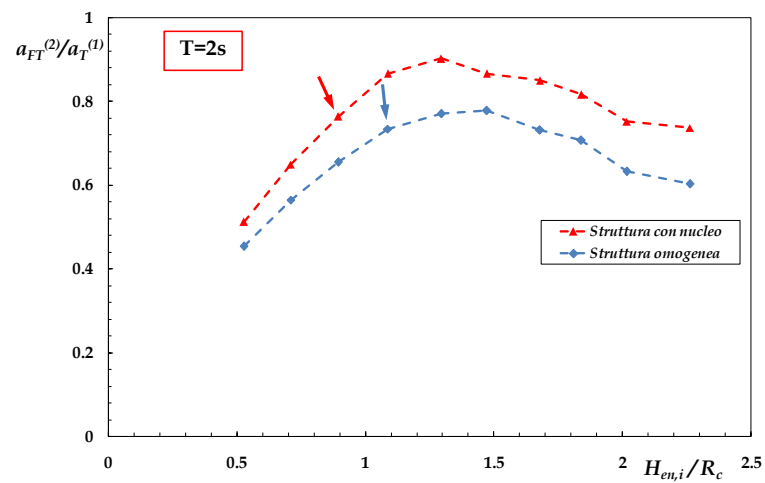
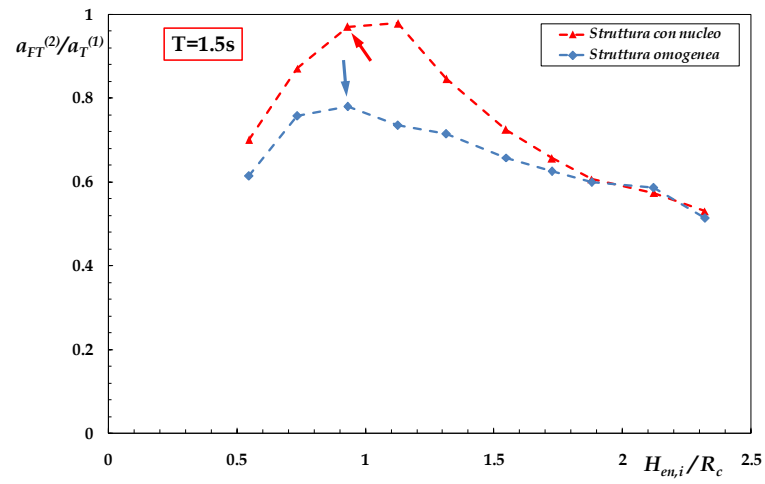
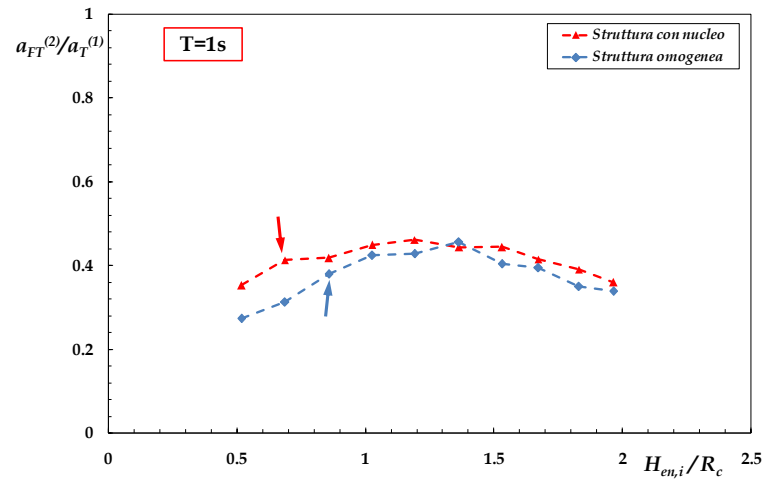


Figura 6.61. Ampiezza dell'armonica libera di pulsazione  $2\omega$  rapportata alla fondamentale in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente [ $B=80cm$ ].



### Lag di fase iniziale tra le componenti trasmesse del I e del II ordine

La coerenza sostanziale tra strutture zonate e strutture omogenee sembra valere anche in termini di sfasamento tra le componenti, come mostrato dai grafici delle Figure 6.62 e 6.63.

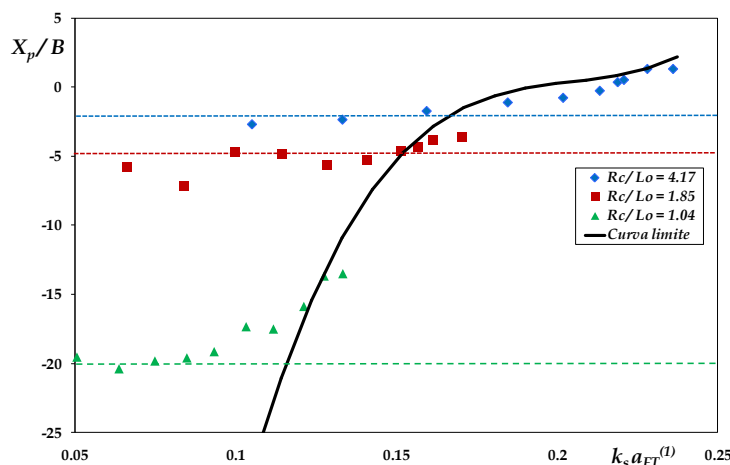


Figura 6.62. Andamento del rapporto  $X_p/B$  in funzione di  $k_s a_{FT}^{(1)}$  per struttura con nucleo a cresta stretta.

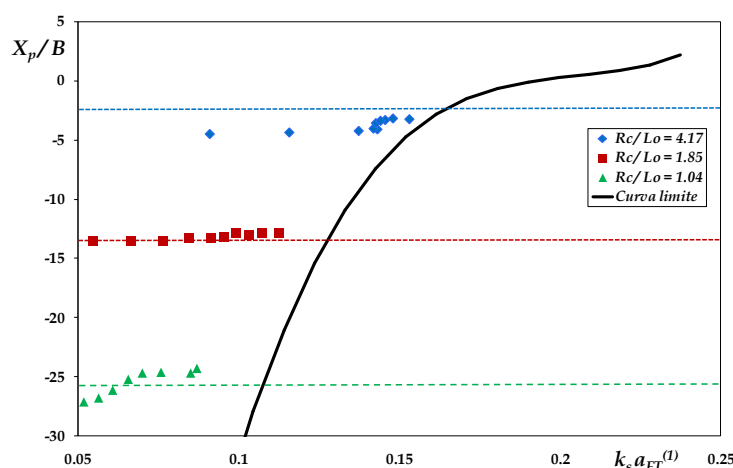


Figura 6.63. Andamento del rapporto  $X_p/B$  in funzione di  $k_s a_{FT}^{(1)}$  per struttura con nucleo a cresta larga.

### Intensità delle interazioni tra le componenti libere

Nelle Figure 6.64 ed 6.65, sono riportati i consueti rapporti tra la potenza della componente di interferenza del III ordine e la potenza media trasmessa.

Per la struttura a coronamento stretto (Figura 6.64), vi è una generale tendenza della struttura nucleata a ridurre gli effetti di interazione; ciò avviene in misura più marcata per  $T=1s$  e  $2s$ , mentre per  $T=1.5s$  il comportamento è più incerto. Quando il coronamento diventa ampio (Figura 6.65) la tendenza globale diventa meno

sistemica. In ogni caso i frattili di energia associati alle componenti di interferenza non superano il 2%.

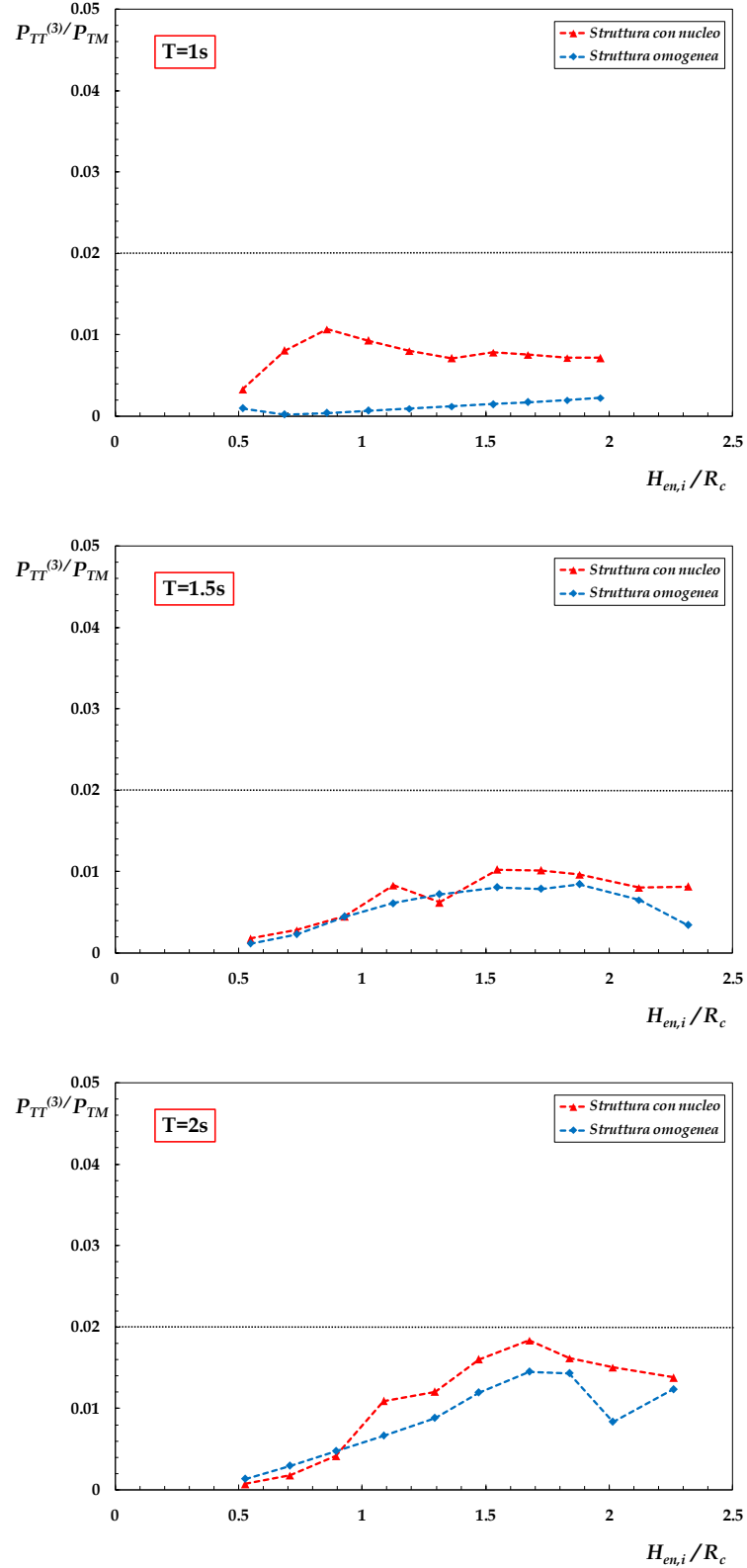


Figura 6.64. Andamento del rapporto  $P_{TT}^{(3)}/P_{TM}$  in funzione di  $H_{en,i}/R_c$  per  $B=25cm$ .

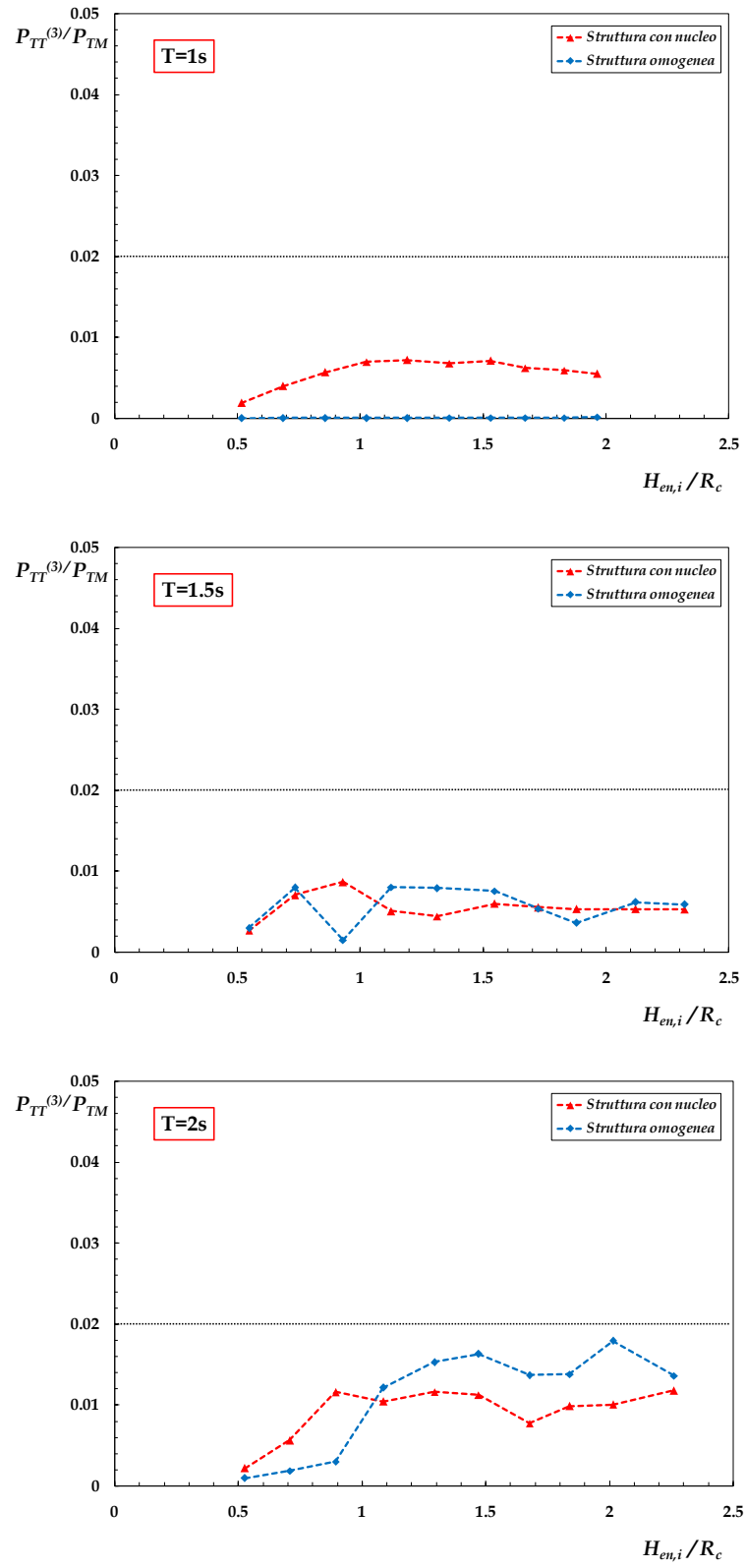


Figura 6.65. Andamento del rapporto  $P_{TT}^{(3)}/P_{TM}$  in funzione di  $H_{en,i}/R_c$  per  $B=80cm$ .

#### 6.4.5 L'effetto della pendenza del paramento lato mare

Nel presente paragrafo verrà analizzata la risposta di una sezione di barriera nucleata a cresta stretta ( $B=25\text{cm}$ ), identicamente sommersa rispetto alle altre sin qui presentate ( $R_c=6.5\text{cm}$ ), ma con un paramento lato mare inclinato 1:5 sull'orizzontale.

Gli esperimenti per questo tipo di struttura non sono stati condotti direttamente dal candidato, ma costituiscono il risultato di una tesi di laurea svolta dall'ingegnere Maria Rosaria Sena e discussa nell'ottobre del 2007.

Sfortunatamente i processi di elevazione d'onda sono stati qui acquisiti in sole 4 sezioni di cui non è data l'esatta posizione. Per questo motivo le ampiezze delle componenti in gioco sono state stimate mediante il metodo introdotto da Lin e Huang nel 2004 discusso in Appendice A.

Tuttavia per conferire al metodo una maggiore stabilità, sono state trascurate, in accordo con il criterio generale di stima qui adoperato (basato sull'acquisizione multipla del segnale d'onda), le componenti riflesse del II ordine; questo approccio è anche coerente con Grue (1992).

Prima dell'applicazione, le potenzialità del metodo di Lin e Huang (2004) sono state studiate confrontando i valori stimati di  $a_{FT}^{(1)}$  e  $a_{FT}^{(2)}$ , per le configurazioni strutturali esaminate nei paragrafi precedenti, con quelli ottenuti mediante rilevazione multipla del profilo in 16/20 posizioni. Il metodo di Lin e Huang è stato ripetutamente applicato ad un insieme di 4 sonde dislocate in 4 posizioni diverse. La posizione reciproca dei sensori è identica a quella adoperata nel corso della tesi dell'Ing. Sena ed è riportata di seguito in Figura 6.66 per facilitare la successiva discussione (il grafico era già stato proposto alla Figura 4.8).

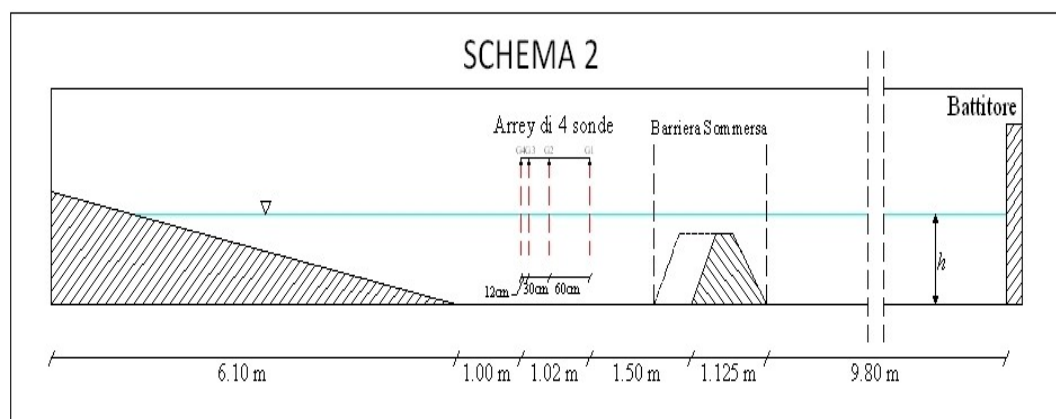


Figura 6.66. Posizione reciproca dei sensori adoperati per l'applicazione del metodo di Ling e Huang (2004).

I risultati del confronto sono mostrati nelle Figure 6.67 ed 6.68.

Per quanto riguarda la componente fondamentale l'accordo è molto buono, eccezione fatta per alcuni punti relativi a  $T=2\text{s}$ . Una possibile spiegazione di questo risultato è che per questi dati le lunghezze di ricorrenza associate alla riflessione parziale sono assai maggiori del campo di misura occupato dai 4 sensori (complessivamente  $1.02\text{m}$ , contro  $L/2=3.3\text{m}$ ); in pratica, poiché le sonde sono troppo vicine le informazioni fornite dalle misure sono insufficienti (al limite identiche tra di loro) e ciò rende la stima più incerta.

In ogni caso la maggior parte dei dati giace in una banda di semi ampiezza pari al 10% rispetto ai valori stimati mediante il criterio generale adoperato in questa tesi.

Le componenti libere del II ordine sono risultate stimate con una approssimazione relativa minore rispetto ad  $a_{FT}^{(1)}$  (semibanda del 30%), anche a causa del fatto che il loro valore assoluto è inferiore a quello della componente fondamentale.

In ogni caso la gran parte degli "out-liar" (cerchiati in rosso in Figura 6.68) appartengono al periodo  $T=2s$ .

La sensazione di maggiore dispersione dei dati sperimentali osservata in entrambi i grafici, congiuntamente ai dubbi precedentemente discussi circa la possibilità di adoperare il metodo su una base di misura molto inferiore alle lunghezze di "beat" delle diverse componenti, hanno condotto alla decisione di eliminare prudenzialmente i dati relativi a  $T=2s$ .

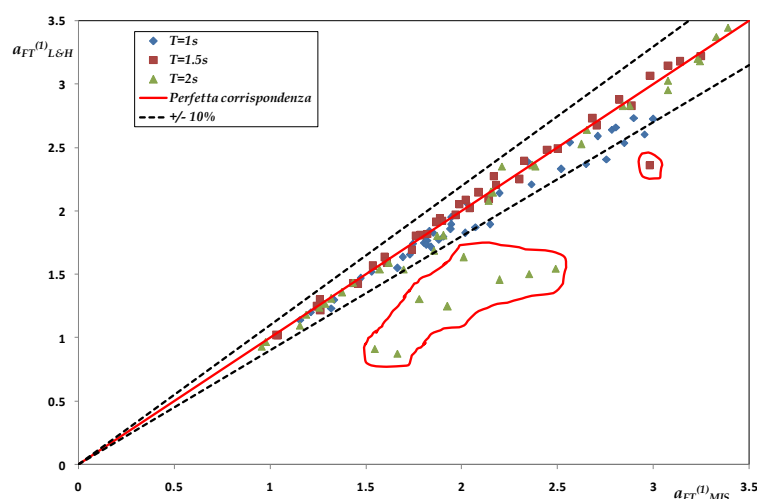


Figura.6.67. Confronto tra i valori di  $a_{FT}^{(1)}$  misurati mediante acquisizione multipla del profilo ondoso e quelli stimati con il metodo di Ling e Huang (2004).

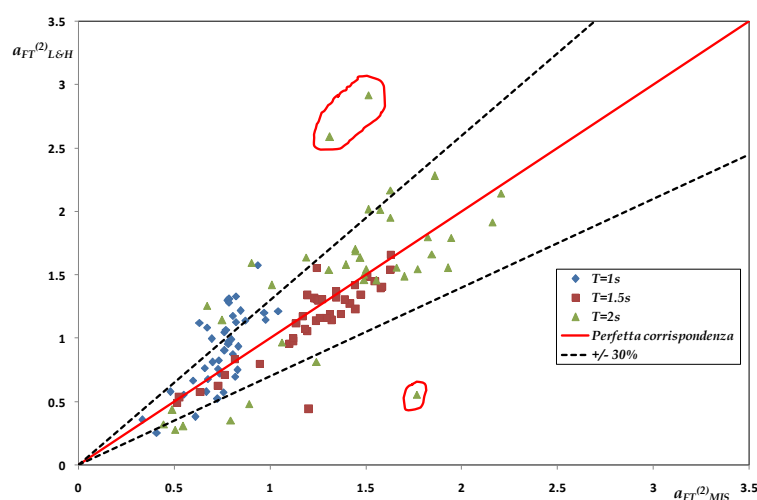


Figura.6.68. Confronto tra i valori di  $a_{FT}^{(2)}$  misurati mediante acquisizione multipla del profilo ondoso e quelli stimati con il metodo di Ling e Huang (2004).

### Analisi macroscopica dell'interazione con moto ondoso

Un aspetto di sicuro interesse per la struttura qui esaminata è cercare di comprendere se il paramento più dolce (che comporta una struttura relativamente più estesa e quindi più onerosa) sia in grado di anticipare la transizione “non-frangimento/frangimento”; in effetti, secondo un meccanismo ben conosciuto per le spiagge naturali, l'indice di frangimento, ovvero il rapporto tra l'altezza d'onda in condizioni di frangimento incipiente ed il corrispondente tirante, dovrebbe decrescere con la pendenza del fondale conducendo ad anticipare la transizione “non-frangimento/frangimento”.

In realtà, gli studi condotti su strutture simili a quelle qui esaminate da Goda e Morinobu nel 1998 (gli Autori studiarono il caso di una “shelf” con una rampa di approccio di pendenza variabile) e da Kawasaki e Iwata nel 2001 (su barriere sommerse impermeabili trapezoidali) testimoniano di un comportamento inverso, con la transizione “non-frangimento/frangimento” che viene ritardata da un paramento dolcemente acclive, proprio a causa di una riduzione della generazione delle componenti libere di frequenza doppia rispetto alla fondamentale.

I risultati delle analisi video sono sintetizzati in Tabella VI, da confrontarsi con l'analoga Tabella IV riproposta qui per maggiore chiarezza.

h = 31.5 cm		T=1s		T=1.5s		T=2s	
Test	H (cm)	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang
1	3	NO		NO		NO	
2	4	SI (S-P)	in.crest	NO		NO	
3	5	SI (S-P)	in.crest	SI [B-S]	m.crest	NO	
4	6	SI (S-P)	in.crest	SI [B-S]	m.crest	SI [S]	in.crest
5	7	SI (S-P)	m.crest	SI [B-S]	m.crest	SI (S-P)	out.crest
6	8	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	m.crest	SI (S-P)	out.crest
7	9	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	m.crest	SI (S-P)	out.crest
8	10	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI (S-P)	out.crest
9	11	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope
10	12	SI (S-P)	out.crest	SI [B-P]	out.crest	SI [C-P]	out.slope

Tabella 6.IV. Barriera con nucleo e pendenza 1:2 ( $R_c = 6.5\text{cm}$ ).

h = 31.5 cm		T=1s		T=1.5s	
Test	H (cm)	Frangimento	Punt.Frang	Frangimento	Punt.Frang
1	3	NO		NO	
2	4	NO		NO	
3	5	SI [S-P]	in.crest	SI [S-P]	in.crest
4	6	SI [S-P]	in.crest	SI [S-P]	in.crest
5	7	SI [S-P]	m.crest	SI [S-P]	m.crest
6	8	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest
7	9	SI [S-P]	out.slope	SI [S-P]	out.slope
8	10	SI [S-P]	out.slope	SI [S-P]	out.slope
9	11	SI [S-P]	out.slope	SI [S-P]	out.slope
10	12	SI [S-P]	out.slope	SI [S-P]	out.slope

Tabella 6.VI. Barriera con nucleo e pendenza 1:5 ( $R_c = 6.5\text{cm}$ ).

In sintesi non è stato possibile riscontrare alcuna influenza sistematica del paramento esterno sull'inizio del frangimento (né in un senso né nell'altro).

In effetti per  $T=1s$  ed  $H_i=4cm$  (frangimento incipiente per la struttura di pendenza 1:2), il profilo dell'onda per la barriera con paramento dolce appare meno ripido (Foto 6.32) testimoniando di un possibile ritardo nella transizione.



Foto 6.32. Confronto tra le intensità del frangimento sulla barriera con pendenza 1:2 (sinistra) e pendenza 1:5 (destra) per  $H_i=4cm$  e  $T=1s$ .

Al contrario la Foto 6.33 mostra come il profilo ondoso per  $H_i=4cm$  e  $T=1.5s$  (immediatamente prima della transizione per la struttura 1:2) sia addirittura leggermente più ripido per la struttura con pendenza 1:5 rispetto al caso di 1:2.

Non è stato possibile, dunque, riscontrare alcuna influenza sistematica del paramento lato mare sulla transizione "non-frangimento/frangimento".



Foto 6.33. Confronto tra le intensità del frangimento sulla barriera con pendenza 1:2 (sinistra) e pendenza 1:5 (destra) per  $H_i=4cm$  e  $T=1.5s$ .

Dall'analisi video è inoltre emerso che, come largamente atteso, la maggiore lunghezza complessiva della struttura sposta la tipologia di frangimento verso la categoria [S-P], non essendo stata riscontrata per  $T=1.5s$  la caratteristica forma di rottura a tratti paralleli (*Bore*). Un altro risultato facilmente prevedibile è l'arretramento del punto di frangimento che, come riportato in Tabella VI, si colloca sul paramento esterno a partire dall'altezza  $H_i=9cm$  per entrambi i periodi. I fotogrammi i Foto 6.34 ed 6.35



mostrano l'inizio della rottura e il punto di plunging per le altezze  $H_i=9\text{cm}$ ,  $10\text{cm}$  ed  $11\text{cm}$  (ed entrambi i periodi).

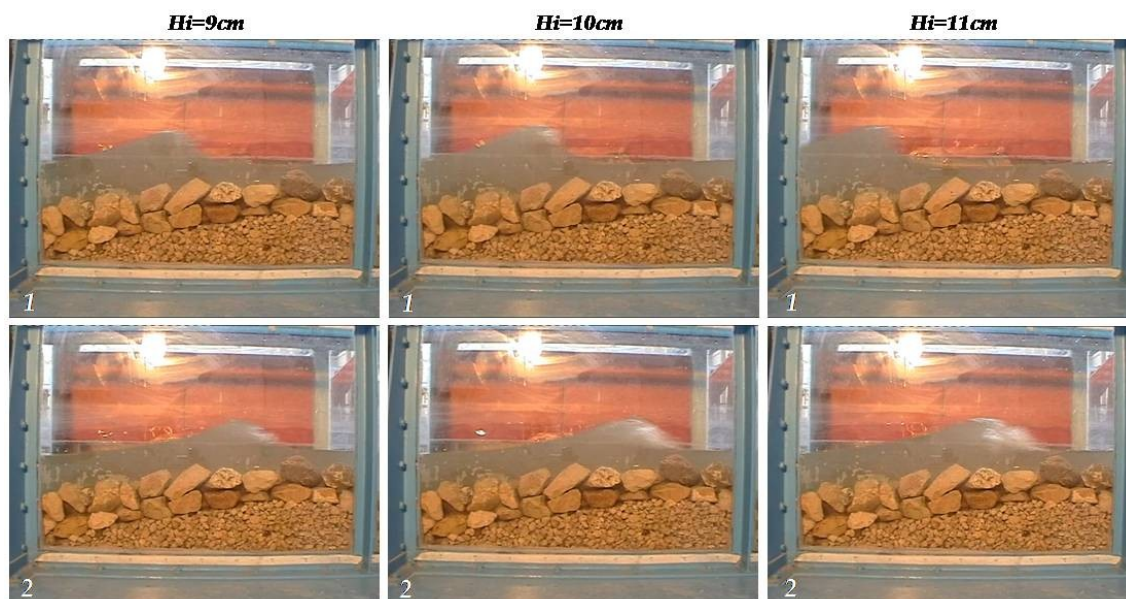


Foto 6.34. Fotogrammi di frangimento sulla struttura a dolce pendenza per  $H_i=9\text{cm}$ ,  $10\text{cm}$  ed  $11\text{cm}$  [ $T=1\text{s}$ ].

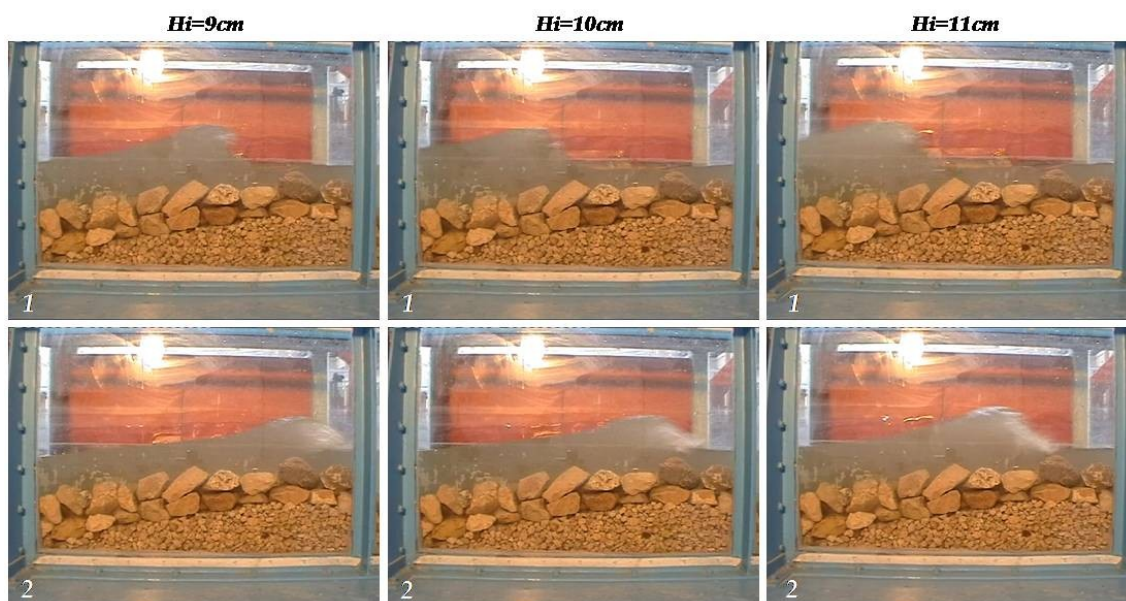


Foto 6.35. Fotogrammi di frangimento sulla struttura a dolce pendenza per  $H_i=9\text{cm}$ ,  $10\text{cm}$  ed  $11\text{cm}$  [ $T=1.5\text{s}$ ].

In definitiva la presenza di un paramento più dolcemente acclive condurrebbe ad un'altezza di transizione pressoché identica (almeno nell'ambito dei dati qui esaminati), ma una volta che il frangimento si è innescato si determina un arretramento del punto di rottura che conduce, a pari ampiezza del coronamento, ad una maggiore ampiezza di dissipazione.



### Ampiezze del moto ondoso trasmesso

La Figura 6.69 mostra l'andamento della componente fondamentale trasmessa per ciascun periodo. Dai grafici è evidente che la presenza di un paramento più dolce riduce l'ampiezza della dominante trasmessa per tutto il dominio di valori delle onde incidenti, sia prima che dopo l'innescarsi del frangimento. Per le onde inferiori a quella di "transizione", la riduzione della fondamentale potrebbe essere dovuta ad effetti dissipativi associati alla filtrazione, processo che può aver luogo per una maggiore distanza nel caso di pendenza lato mare 1:5 (in effetti la struttura è più lunga). Immediatamente dopo il frangimento, dovrebbe sommarsi l'effetto di maggiore dissipazione associato all'arretramento del punto di rottura descritto precedentemente. Quest'ultimo potrebbe essere connesso alla possibilità che l'onda incidente subisca una qualche forma di "shoaling" favorito dalla pendenza dolce. Così l'altezza d'onda diviene maggiore rispetto al caso di pendenza 1:2 favorendo il collasso.

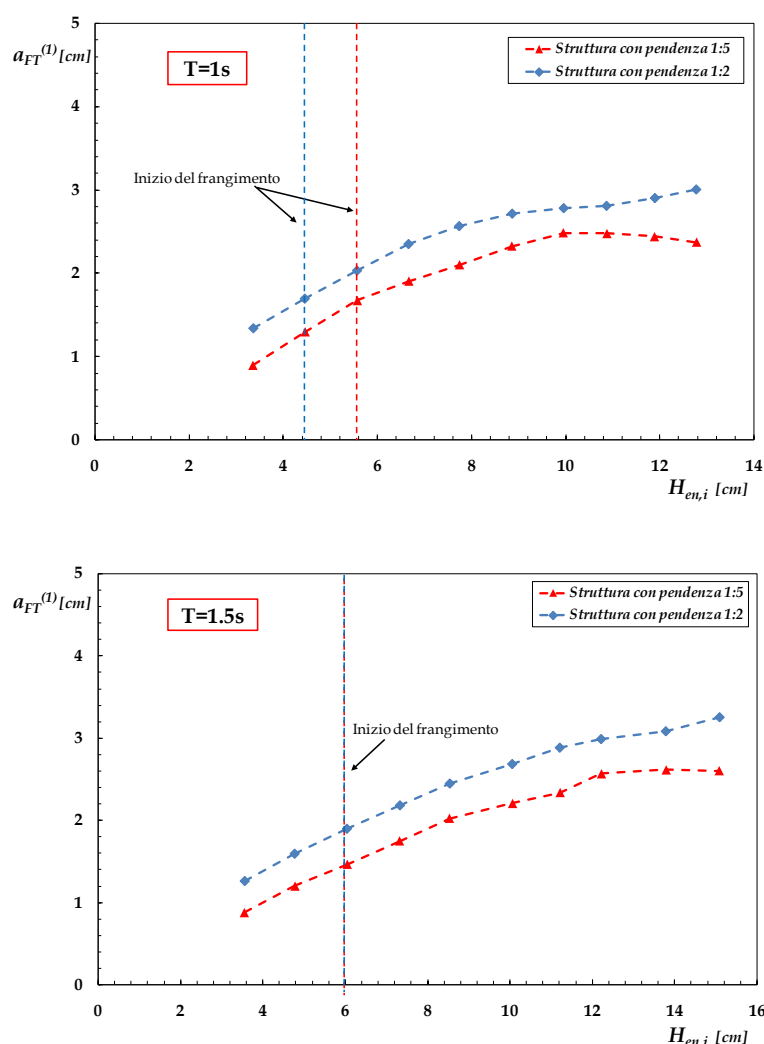


Figura 6.69. Andamento di  $a_{FT}^{(1)}$  in funzione di  $H_{en,i}$ .

Per quanto riguarda le  $a_{FT}^{(2)}$ , i grafici di Figura 6.70 suggeriscono che la presenza di un paramento dolce determini, specie prima del frangimento, uno sviluppo più lento delle super-armoniche libere di II ordine (specie nel caso di  $T=1s$  dove in effetti è stata

riscontrata una qualche minore ripidità del profilo ondoso in condizioni prossime a quelle di frangimento incipiente).

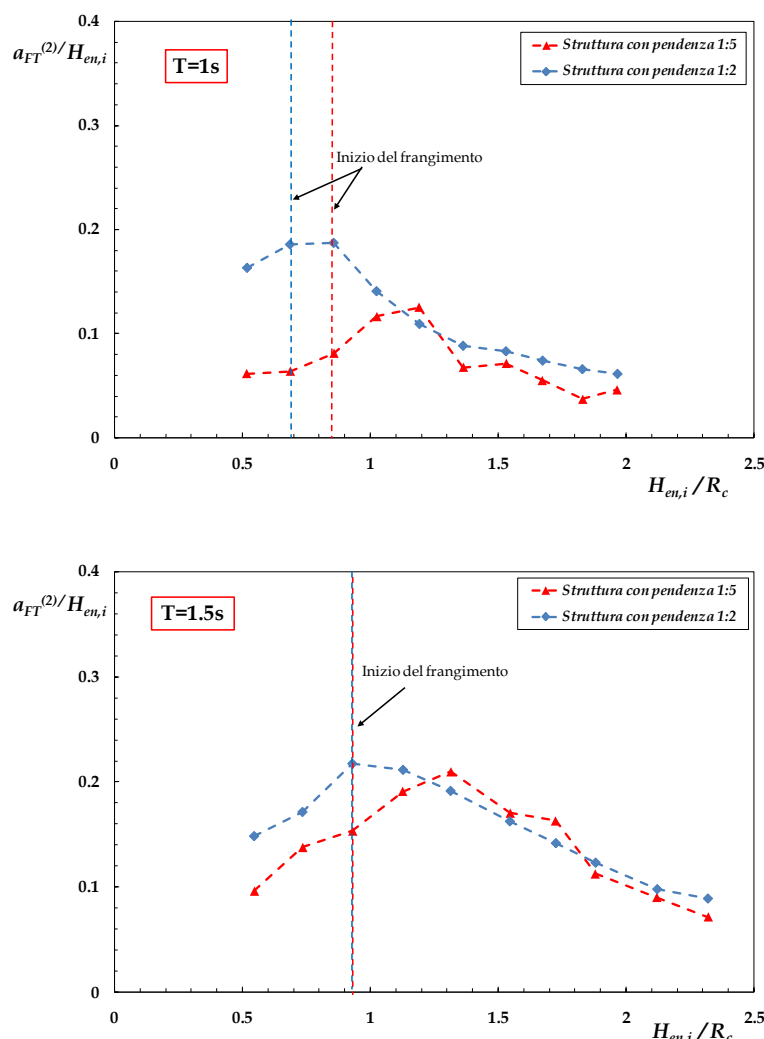


Figura 6.70. Andamento del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/H_{en,i}$  in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa.

Le ampiezze libere del II ordine, tuttavia, sembrano attingere lo stesso valore di saturazione e decrescere in maniera simile rispetto al caso di struttura con pendenza lato mare 1:2. Quest'ultimo aspetto è abbastanza chiaramente visibile anche in Figura 6.71 in cui i dati sperimentali per la struttura qui discussa sembrano mostrare una significativa coerenza con la curva di saturazione relativa alla struttura con pendenza 1:2, la quale è riportata nel grafico mediante la solita curva a tratto continuo.

Anche qui sembrerebbero essere presenti delle zone asintotiche in corrispondenza delle quali la risposta della struttura è analoga a quella di un battitore a pistone in condizioni di non linearità. Nel grafico i segmenti tratteggiati si riferiscono ai livelli asintotici riscontrati nell'analoga struttura con pendenza 1:2.

Per  $T=1s$  il livello dell'asintoto è più basso, testimoniando della minore non linearità associata alla crescita più bassa delle  $a_{FT}^{(2)}$  mostrato in Figura 6.70. Al contrario per  $T=1.5s$ , l'ideale battitore associato al paramento con dolce pendenza sembrerebbe

muoversi (sorprendentemente) su fondali più bassi e, dunque, in condizioni più non lineari. Quest' ultimo risultato, come si deduce dai grafici appena commentati, è in definitiva attribuibile alla riduzione di  $a_{FT}^{(1)}$ , che compare elevato al quadrato al denominatore di  $b_{F2}$ . Al contrario le  $a_{FT}^{(2)}$  continuano ad essere inferiori a quelle della struttura 1:2 (prima della saturazione), sebbene con differenziali più ridotti rispetto a  $T=1s$ .

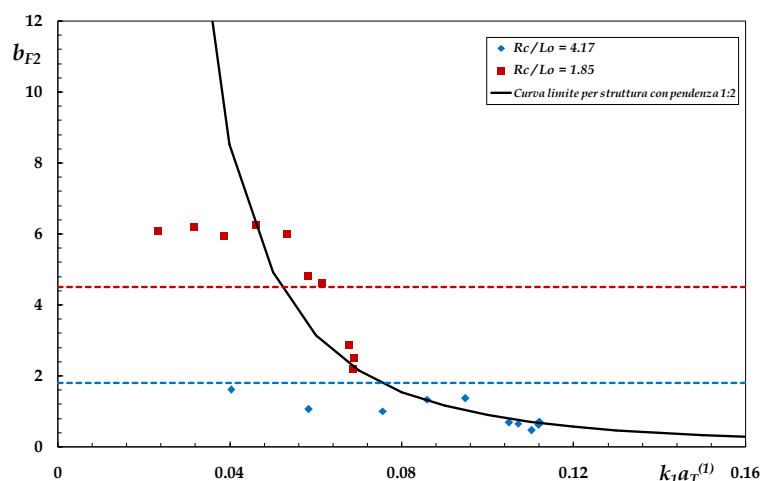


Figura 6.71. Fattore di proporzionalità  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_T^{(1)}$ .

A causa della tecnica adoperata per la stima delle componenti trasmesse, ed in ragione della sua sensibilità (il metodo di Ling e Huang è stato esteso prudenzialmente solo al II ordine), non sono state acquisite le informazioni relative alle componenti libere del III ordine ed al lag di fase iniziale tra componente principale e super-armonica libera del II ordine.

#### 6.4.6 L'influenza della sommergenza

Le configurazioni descritte di seguito possiedono tutte una sommergenza ridotta rispetto alle precedenti, ovvero  $Rc=2.6cm$ .

A parità di quota di cresta sono state considerate una struttura con pendenza lato mare 1:2 e coronamento largo 25cm (Struttura 2), una struttura con pendenza lato mare 1:2 e coronamento largo 80cm (Struttura 1) ed infine una struttura con ampiezza di coronamento 25cm e pendenza del paramento lato mare 1:5 (Struttura 5). Tutte i modelli possiedono una sezione zonata.

È importante sottolineare che la riduzione della quota di sommergenza è stata ottenuta mantenendo inalterata l'altezza delle opere e riducendo il tirante all'ondogeno ( $h=27.6cm$ ). In queste condizioni diviene concreta la possibilità che i risultati sperimentali siano influenzati da disturbi spuri non lineari generati dal battionda,

proprio come descritto nel corso del Capitolo 2. Pertanto, per queste configurazioni, sono stati studiati unicamente gli attacchi ondosi con  $T=1s$ .

Tale decisione deriva anche dai risultati di uno studio specifico condotto dallo scrivente nella medesima canaletta (Calabrese et al., 2008)<sup>4</sup>; l'indagine aveva mostrato che, nelle condizioni idrauliche che si intendono adoperare per l'analisi ( $h=27.6cm$  e  $T=1s$ ), l'ampiezza dei disturbi non lineari potesse considerarsi trascurabile.

#### Analisi macroscopica dell'interazione con moto ondos

Gli attacchi ondosi qui considerati conducono a frangimenti del tipo [S-P] (Tabella VII). Per tutte le strutture il punto di frangimento arretra progressivamente, al crescere dell'altezza d'onda, dalla cresta verso il paramento esterno; tale spostamento è piuttosto rapido per la struttura con pendenza 1:5, per la quale la sezione di frangimento rimane comunque ubicata in posizione più arretrata rispetto alle altre configurazioni.

h = 31.5 cm		Struttura 1		Struttura 2		Struttura 5	
Test	H (cm)	Frangimento	Punt.Frang.	Frangimento	Punt.Frang.	Frangimento	Punt.Frang.
1	3	NO		NO		NO	
2	4	SI [S-P]	in.crest	SI [S-P]	in.crest	NO	
3	5	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest
4	6	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.slope
5	7	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.slope
6	8	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.slope
7	9	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.slope
8	10	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.slope
9	11	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.slope
10	12	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.crest	SI [S-P]	out.slope

Tabella VII. Quadro riassuntivo delle caratteristiche macroscopiche di interazione onda-barriera per le tre differenti configurazioni strutturali nucleate con  $R_c=2.6cm$ .

Per le strutture con pendenza lato mare 1:2 il punto di plunging rimane sempre localizzato sulla cresta dell'opera, mentre per il caso 1:5 il processo di rottura sembra completarsi sul paramento esterno per  $H_i = 9cm, 10cm, 11cm$  e  $12cm$  (Foto 6.36).

<sup>4</sup> La ricerca è stata presentata e discussa nell'ambito del convegno internazionale CoastLab 2008, tenutosi a Bari nel giugno 2008.

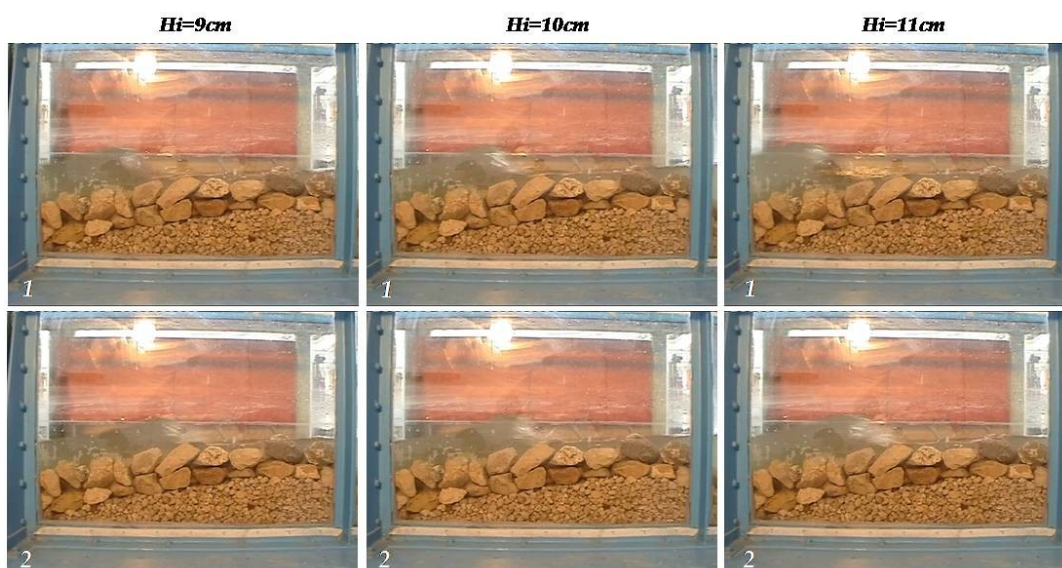


Foto 6.36. Sequenze di frangimento sulla struttura a dolce pendenza per  $H_i=9cm$ ,  $10cm$  ed  $11cm$ .

A completamento di questa analisi le Foto 6.37 ed 6.38 mostrano le sequenze di maggior rilievo del processo di rigenerazione sulla cresta ("*reforming*"). Il getto plunging colpisce la superficie libera antistante determinando uno *splash*, le cui dimensioni sono connesse alla quantità di moto del *plunging-jet* che muove dal profilo onduoso; al di sotto dello "*splash*" quale la massa idrica retrostante il getto plunging spinge in avanti la nuova onda completando il processo di rigenerazione.

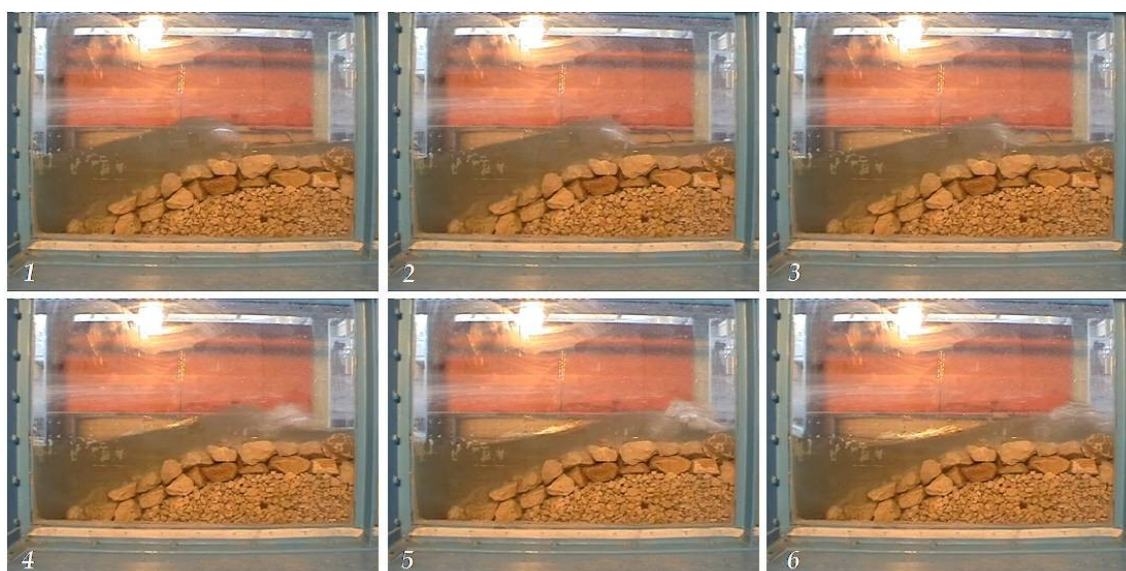


Foto6.37. Sequenze di frangimento sulla struttura a cresta stretta con pendenza 1:2. [ $H_i=9cm$ ].



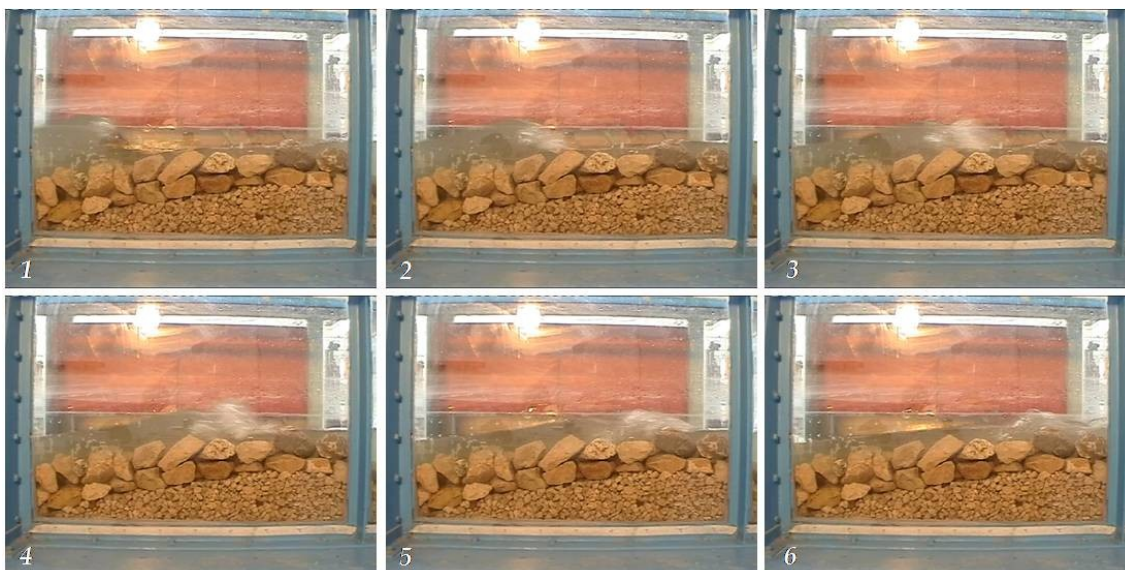


Foto6.38. Sequenze di frangimento sulla struttura a cresta stretta con pendenza 1:5. [ $H_i=11\text{cm}$ ].

### Analisi del moto ondoso trasmesso

La Figura 6.72 mostra l'andamento delle componenti armoniche fondamentali trasmesse in funzione dell'altezza d'onda incidente  $H_{en,i}$ .

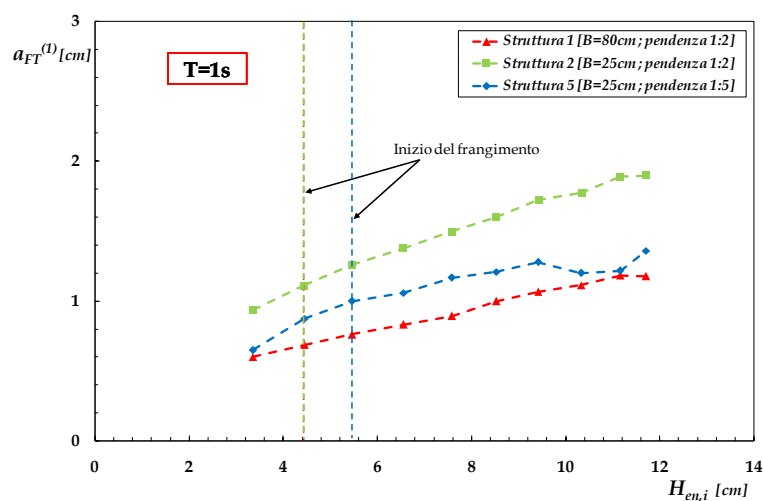


Figura 6.72. Andamento di  $a_{FT}^{(1)}$  in funzione di  $H_{en,i}$ .

È interessante notare come l'ampiezza della dominante non risulti mai nettamente decrescente, eccezione fatta per una piccola porzione relativa alla struttura 1:5 e probabilmente connessa alla metodologia di stima di Ling e Huang (2004). È inoltre evidente dal grafico che, come atteso, la struttura con coronamento ampio consente di minimizzare la trasmissione rispetto alle altre due strutture. Quanto a queste ultime i valori misurati per la barriera con paramento dolce (mediante il metodo di Ling e Huang) sono nettamente inferiori (minore trasmissione) rispetto al caso di paramento ripido. Questo risultato è verosimilmente connesso alla lunghezza dei percorsi

dissipativi che comprendono la filtrazione attraverso il mezzo poroso (per le onde non frangenti) ed, ovviamente, il frangimento, considerando che l'analisi video testimonia un generale arretramento del punto di rottura e del punto di plunging in caso di paramento dolce. Quindi, introducendo la lunghezza media della struttura, come rapporto tra l'area della sezione della barriera e la sua altezza:

$$L_{MEDIA} = \frac{A_{sezione}}{h_s} \quad [6.49]$$

Si può concludere che l'ampiezza del primo ordine trasmessa decresce in media al crescere di tale parametro (Figura 6.73).

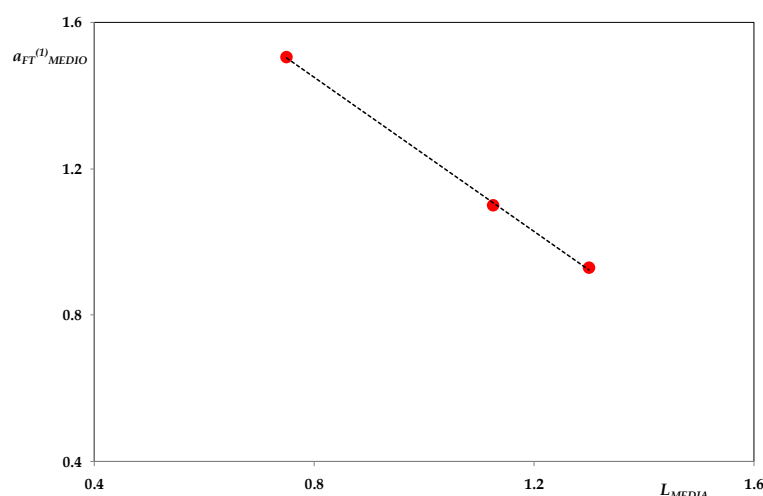


Figura 6.73. Andamento del valore medio di  $a_{FT}^{(1)}$  in funzione di  $L_{MEDIA}$ .

Una ulteriore analisi sul ruolo della quota di sommergenza, sempre relativamente ad  $a_{FT}^{(1)}$ , è stata condotta calcolando, per ciascuna configurazione strutturale qui esaminata, il rapporto percentuale:

$$\left[ \Delta_{FT}^{(1)} \right]_{R_c} = \left[ \frac{[a_{FT}^{(1)}]_{R_c=6.5cm} - [a_{FT}^{(1)}]_{R_c=2.6cm}}{[a_{FT}^{(1)}]_{R_c=6.5cm}} \cdot 100 \right]_{B, tg \alpha = cost} \quad [6.50]$$

che misura in pratica il tasso di riduzione dell'ampiezza fondamentale per effetto della variazione della sommergenza, a parità di ogni altro fattore.

I risultati ottenuti sono mostrati in funzione dell'altezza d'onda di target in Figura 6.74. Conviene confrontare innanzitutto la struttura a berma larga con quella a berma stretta, a parità di pendenza del paramento lato mare.

Il grafico suggerisce che per le onde più piccole l'effetto di una riduzione della quota di sommergenza è più efficace, in termini della riduzione della trasmissione, per la struttura con coronamento ampio. Con il progressivo aumento dell'altezza d'onda incidente questo differenziale va via via riducendosi; questo significherebbe che, nelle condizioni esaminate, il tasso di trasmissione per le altezze d'onda maggiori sarebbe quasi unicamente funzione del rapporto tra l'altezza d'onda incidente e la quota di

sommergenza ( $H_i/R_c$ ). Per di più, per ciascuna delle curve in discussione, sembrerebbe esistere una situazione “di massima efficienza” oltre la quale il tasso di riduzione della trasmissione per effetto della diminuzione della sommergenza, tenderebbe a ridursi. Questo punto è indicato con opportune frecce in figura. Chiaramente, per onde piccole, la condizione di non frangimento, o frangimento debole, per strutture con elevata sommergenza si tramuta in una condizione di frangimento (comunque più evidente) al ridursi di  $R_c$ . Questa situazione fisica corrisponde al ramo ascendente delle curve in figura, quando l’efficienza, associata alla riduzione di sommergenza, tende progressivamente a crescere. Successivamente, l’incremento della potenza dei *plunging-jet* al crescere del rapporto  $H_i/R_c$ , produce un alto valore della dissipazione che riduce l’efficienza globale, cosicché la curva decresce. Per di più l’andamento decrescente riscontrato in figura è pressoché iperbolico e questo conferma le osservazioni riportate da numerosissimi Autori [van der Meer (1992), d’Angremond (1998), Daemen (1991)] riguardo la riduzione lineare del coefficiente di trasmissione con  $R_c$ .

L’andamento relativo alla struttura con paramento 1:5 appare alquanto interessante. Quando le altezze d’onda sono modeste essa è molto simile a quella relativa alla struttura con coronamento stretto e paramento ripido; tuttavia il punto “di massima efficienza” sembrerebbe spostato molto in avanti. Questo verosimilmente accade in quanto, per questa configurazione strutturale, al ridursi di  $R_c$  il frangimento può spostarsi all’indietro con continuità sul paramento rendendo l’effetto della riduzione di sommergenza più efficace (nel caso di paramento ripido il punto di rottura non è stato mai riscontrato ubicarsi più indietro dello spigolo lato mare del coronamento).

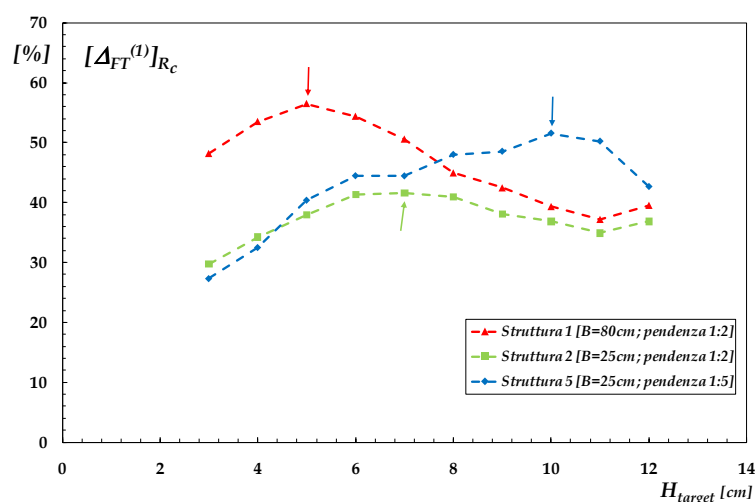


Figura 6.74. Andamento dei tassi di riduzione di  $a_{FT}^{(1)}$  per effetto della variazione di  $R_c$  in funzione dell’altezza d’onda di target.

In maniera del tutto analoga può commentarsi il grafico di Figura 6.75, il quale riporta in ordinate il tasso di riduzione dell’ampiezza fondamentale per effetto dell’allargamento della cresta a parità di ogni altro fattore:



$$\left[ \Delta_{FT}^{(1)} \right]_B = \left[ \frac{\left[ a_{FT}^{(1)} \right]_{B=25cm} - \left[ a_{FT}^{(1)} \right]_{B=80cm}}{\left[ a_{FT}^{(1)} \right]_{B=25cm}} \times 100 \right]_{R_c=cost} \quad [6.51]$$

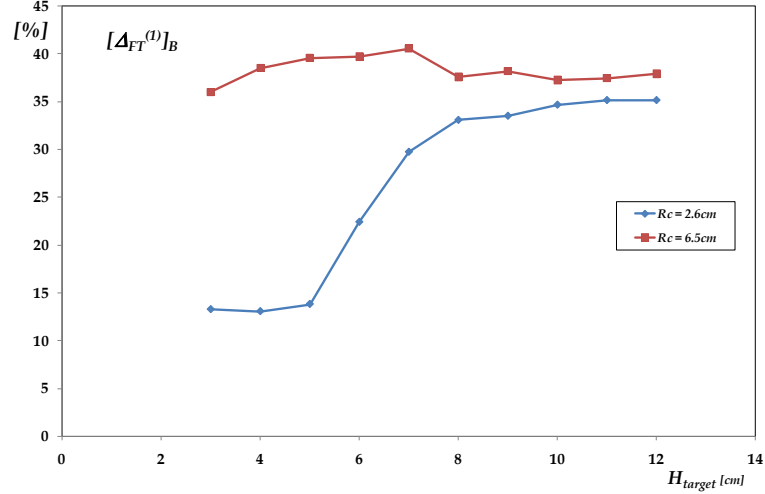


Figura 6.75. Andamento dei tassi di riduzione di  $a_{FT}^{(1)}$  per effetto della variazione di  $B$  in funzione dell'altezza d'onda di target.

Il grafico indica che per il valore della sommergezza più elevato la variazione di  $B$  non produce effetti significativi. Al contrario, in presenza di bassi tiranti sul coronamento, la riduzione della larghezza della cresta produce importanti incrementi dell'efficienza in termini di trasmissione. Anche questo fenomeno è in definitiva connesso alla possibilità che il punto di rottura e quello di plunging arretrino significativamente favorendo il processo di dissipazione. Dall'analisi video, infatti, è stato riscontrato che per coronamento ampio e sommergezza piccola, vi è più di uno "splash point" sulla cresta e questo determina una dissipazione senz'altro molto maggiore.

Quanto all'ampiezza della seconda super-armonica libera, la Figura 6.76 (in termini assoluti) ed 6.77 (in termini di rapporti rispetto ad  $H_{en,i}$ ) sembrano indicare che essa è grosso modo dello stesso ordine di grandezza per le tre strutture, tendendo ad uno stesso asintoto per le altezze d'onda maggiori. Per la struttura con paramento dolce è presente un picco per  $H_{en,i}$  prossimo a  $10cm$ , che è stato tuttavia interpretato come una instabilità della procedura di stima e così verrà considerato nei grafici che seguono.

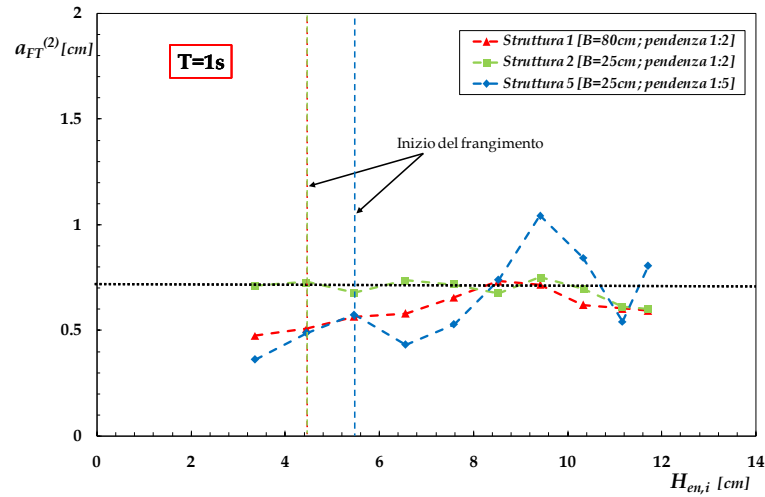


Figura 6.76. Andamento di  $a_{FT}^{(2)}$  in funzione di  $H_{en,i}$ .

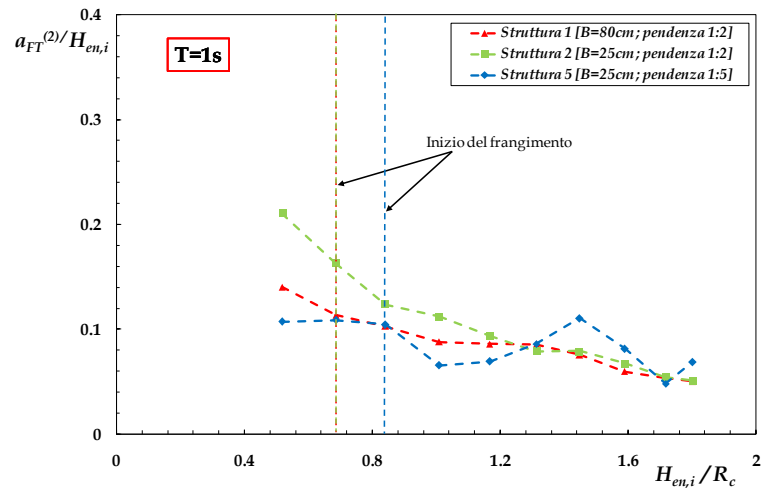


Figura 6.77. Andamento del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/H_{en,i}$  in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa.

Per le strutture a paramento ripido, a causa della riduzione più pronunciata di  $a_{FT}^{(1)}$  per  $B=80cm$ , il tasso di non linearità complessivo  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$  è ovunque maggiore per questa struttura rispetto a quella con  $B=25cm$  (Figura 6.43). D'altro canto la struttura con paramento dolce si comporta complessivamente in maniera intermedia tra le due precedenti, avvicinandosi alla curva relativa a  $B=25cm$  per piccoli valori di  $H_i/R_c$  ed a quella relativa a  $B=80cm$  per le altezze d'onda maggiori.

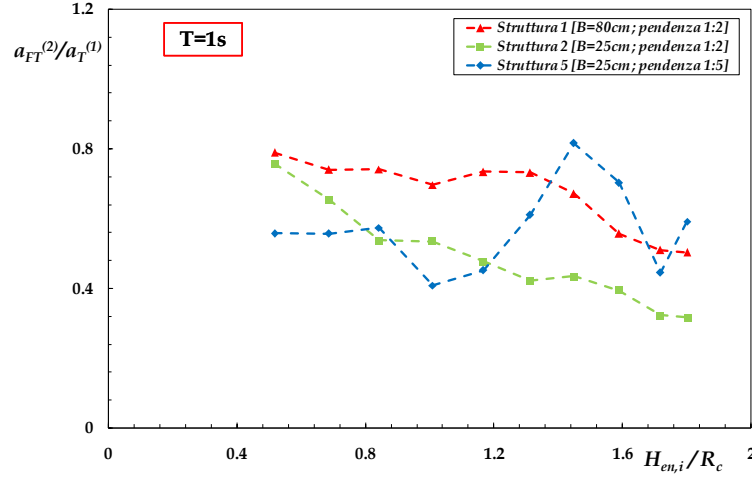
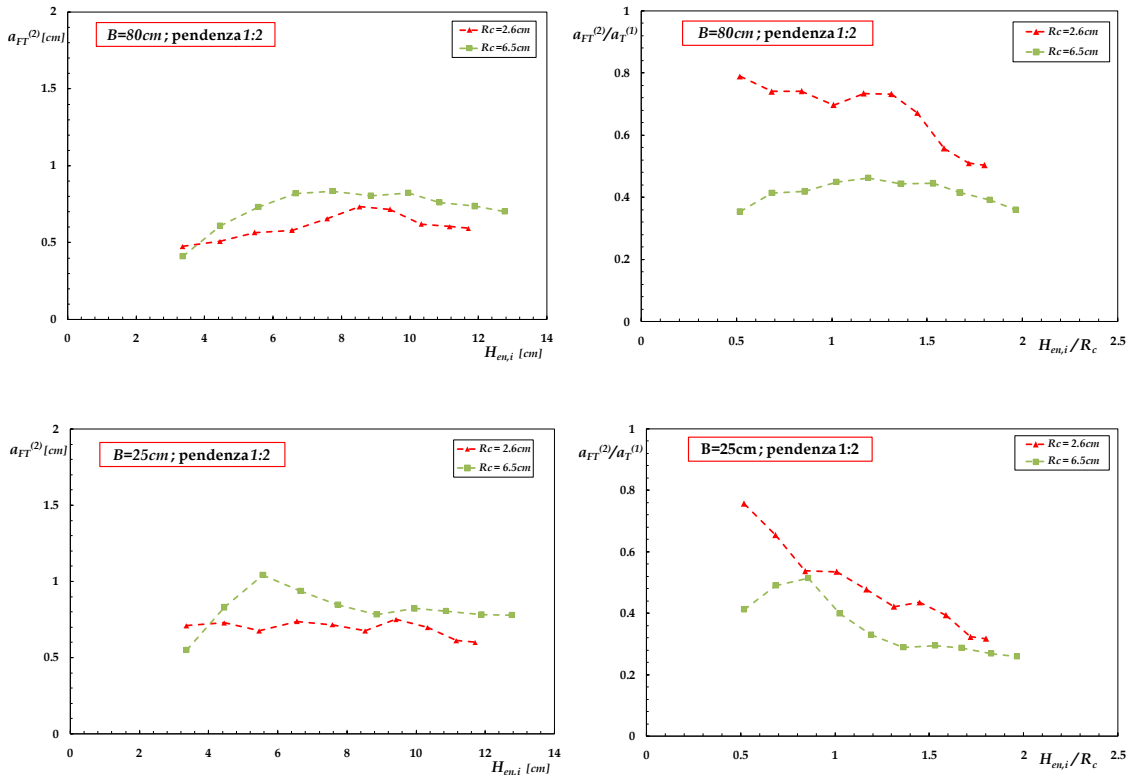


Figura 6.78. Ampiezza dell'armonica libera di pulsazione  $2\omega$  rapportata alla fondamentale in funzione dell'altezza d'onda relativa incidente.

In maniera analoga possono commentarsi i confronti tra strutture omologhe con sommergenze diverse. In termini assoluti  $a_{FT}^{(2)}$  sembra sempre superiore (o almeno non inferiore, come nel caso della struttura con dolce pendenza) per le strutture con la sommergenza maggiore. Ciò chiaramente significa che al ridursi del tirante le  $a_{FT}^{(2)}$  sono comunque coinvolte nel processo di incremento della dissipazione connesso al frangimento. Tuttavia, come già osservato, il minor flusso di energia delle super-armoniche (vedi Equazione [6.48]) conduce probabilmente a minori tassi di dissipazione per cui l'effetto netto è quello di un aumento del tasso di non linearità complessiva  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$  come mostrato nella Figura 6.79.



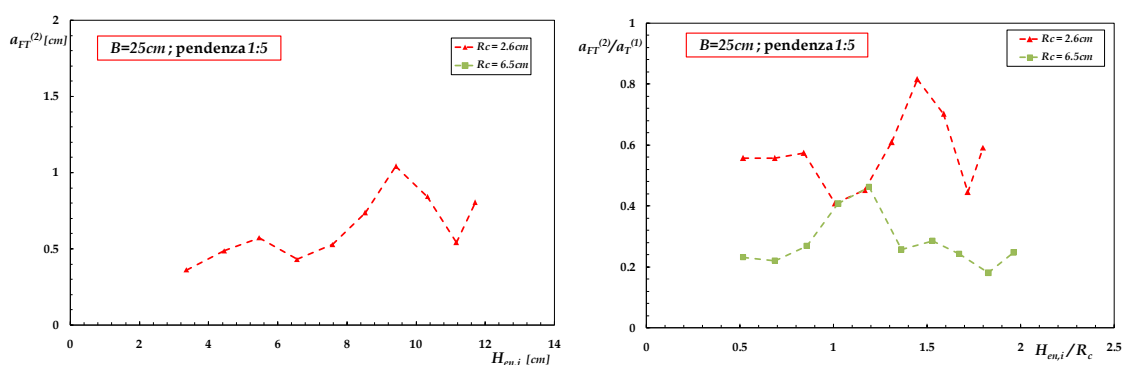


Figura 6.79. Andamento del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$  in funzione di  $H_{en,i}/R_c$  per le tre configurazioni strutturali esaminate.

L'andamento delle componenti del III ordine può commentarsi in maniera del tutto analoga. Vengono riportate nella Figura 6.80 solo in termini relativi.

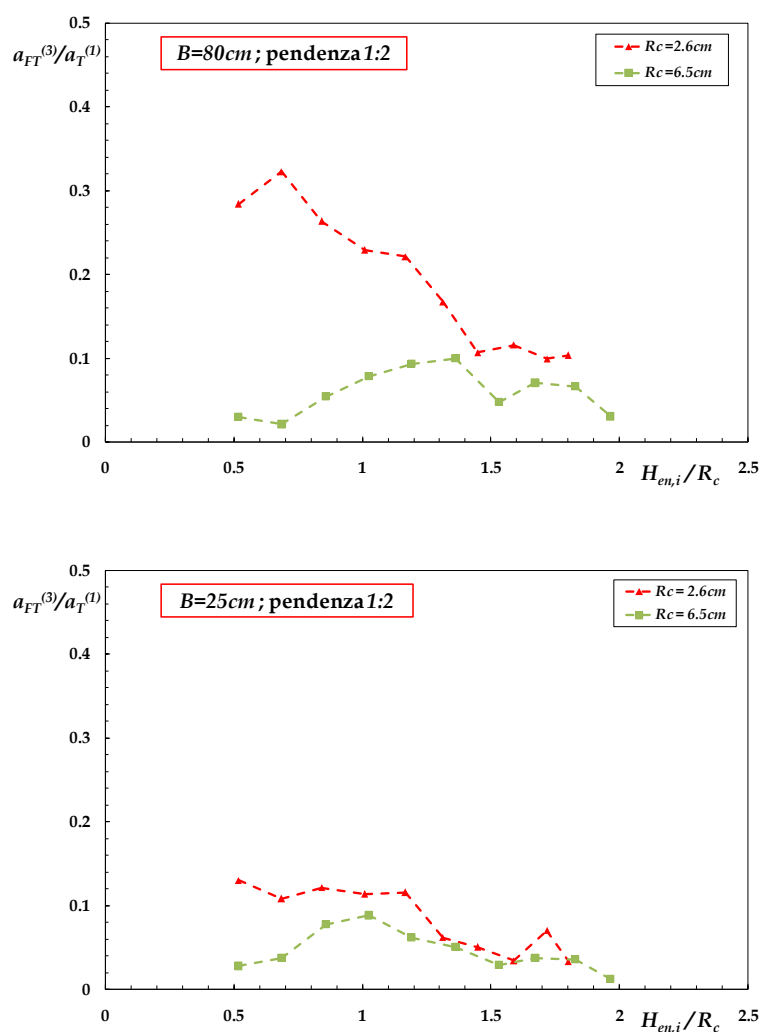


Figura 6.80. Andamento del rapporto  $a_{FT}^{(3)}/a_{FT}^{(1)}$  in funzione di  $H_{en,i}/R_c$  per le due configurazioni strutturali con pendenza 1:2.

Per quanto riguarda i valori dei fattori di proporzionalità  $b_{F2}$  e  $b_{F3}$  le Figure 6.81 ed 6.82 sembrano indicare che tanto le ampiezze libere del II ordine quanto quelle di III ordine si dispongano lungo una linea di saturazione comune a tutte le configurazioni strutturali qui esaminate. Quest'ultima sembra essere raggiunta immediatamente a partire dai più piccoli valori delle ascisse; in effetti, non si riscontrano in questo caso valori asintotici orizzontali.

I fattori  $b_{F2}$  e  $b_{F3}$  possono essere commentati anche attraverso i grafici delle Figure 6.83 ed 6.84 dove questi, per ogni struttura, sono confrontati con i corrispettivi valori riferiti alla sommergenza più elevata. Si nota che, per i tiranti bassi, i valori delle ampiezze libere di ordine II e III ordine, si dispongono nella maggior parte dei casi al di sopra dei corrispettivi valori calcolati con i tiranti più elevati. Tale fatto conferma quanto evidenziato in precedenza e cioè che, per  $R_c=2.6cm$ , l'interazione onda-struttura produce un grado di non linearità più elevato.

È importante rilevare, comunque, che la curva di saturazione di  $b_{F2}$  per  $R_c=2.6cm$  non è perfettamente coerente con quella relativa ad  $R_c=6.5cm$  (linea a tratto continuo); al contrario, per  $b_{F3}$  la curva continua sembra interpolare più che ragionevolmente anche i dati relativi alle sommergenze minori.

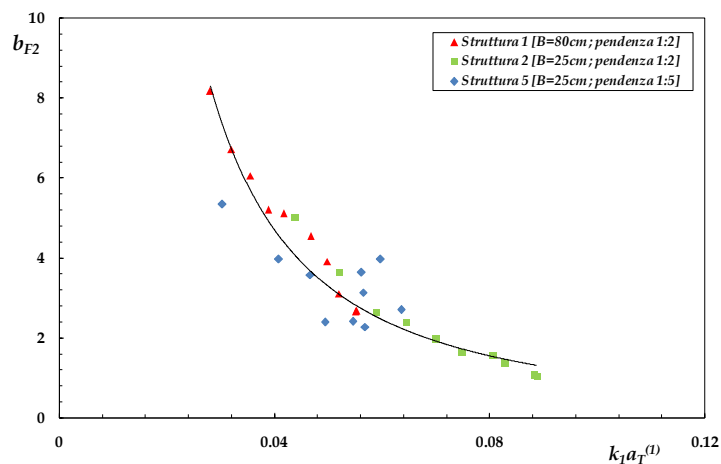


Figura 6.81. Andamento di  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_T^{(1)}$

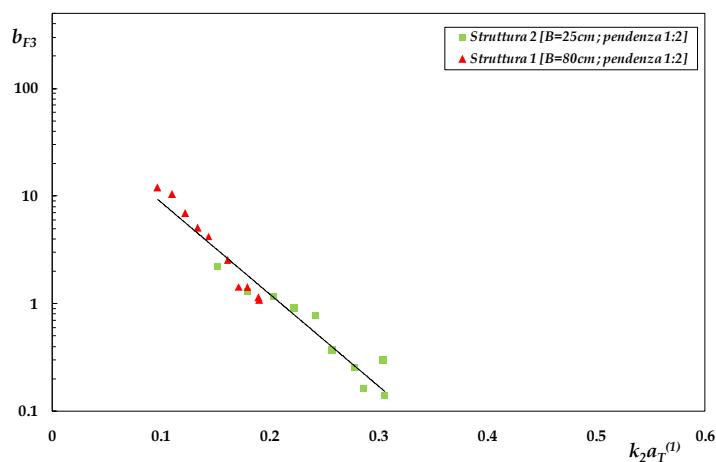


Figura 6.82. Andamento di  $b_{F3}$  in funzione di  $k_2 a_T^{(1)}$ .

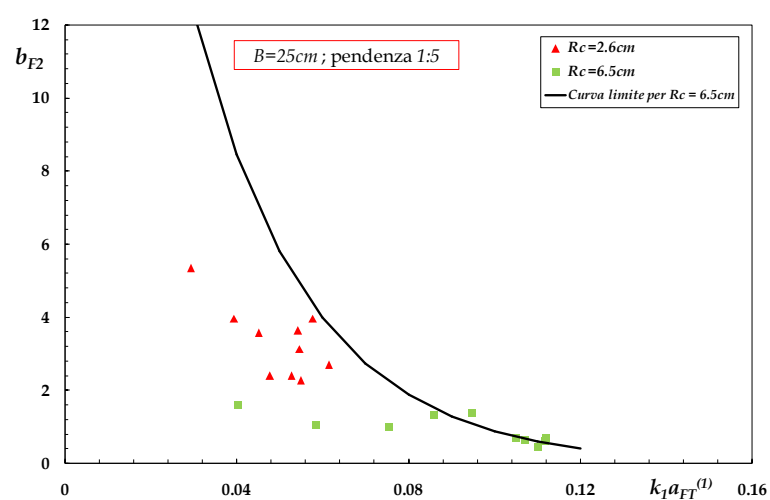
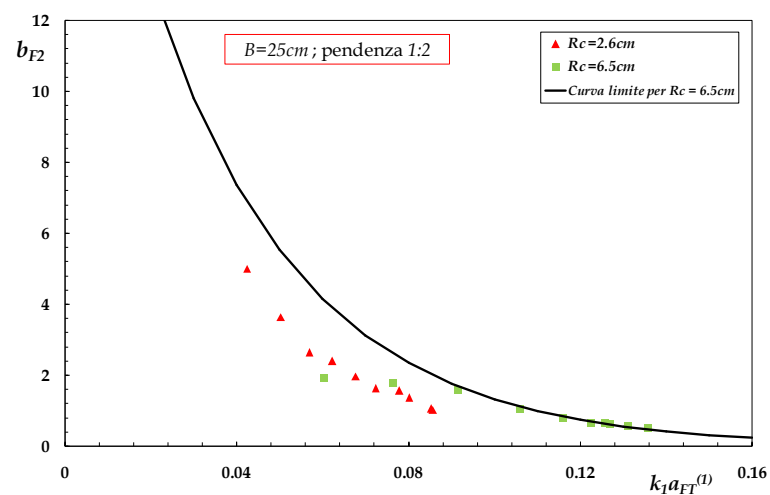
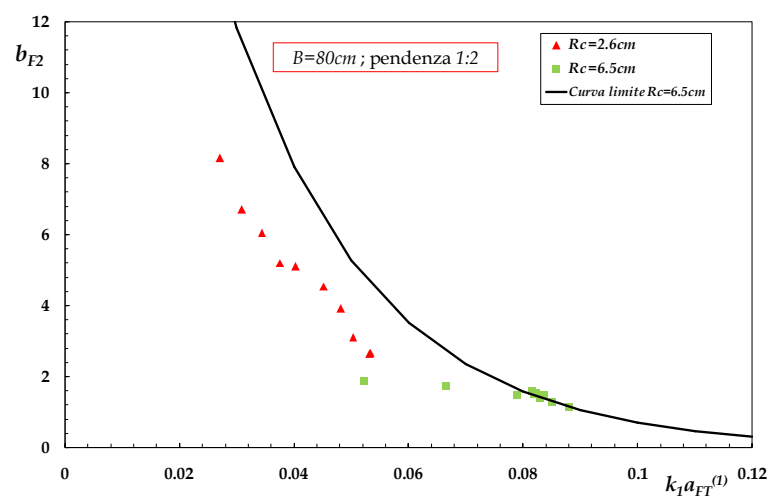


Figura 6.83. Andamento  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$  per le tre configurazioni strutturali esaminate.

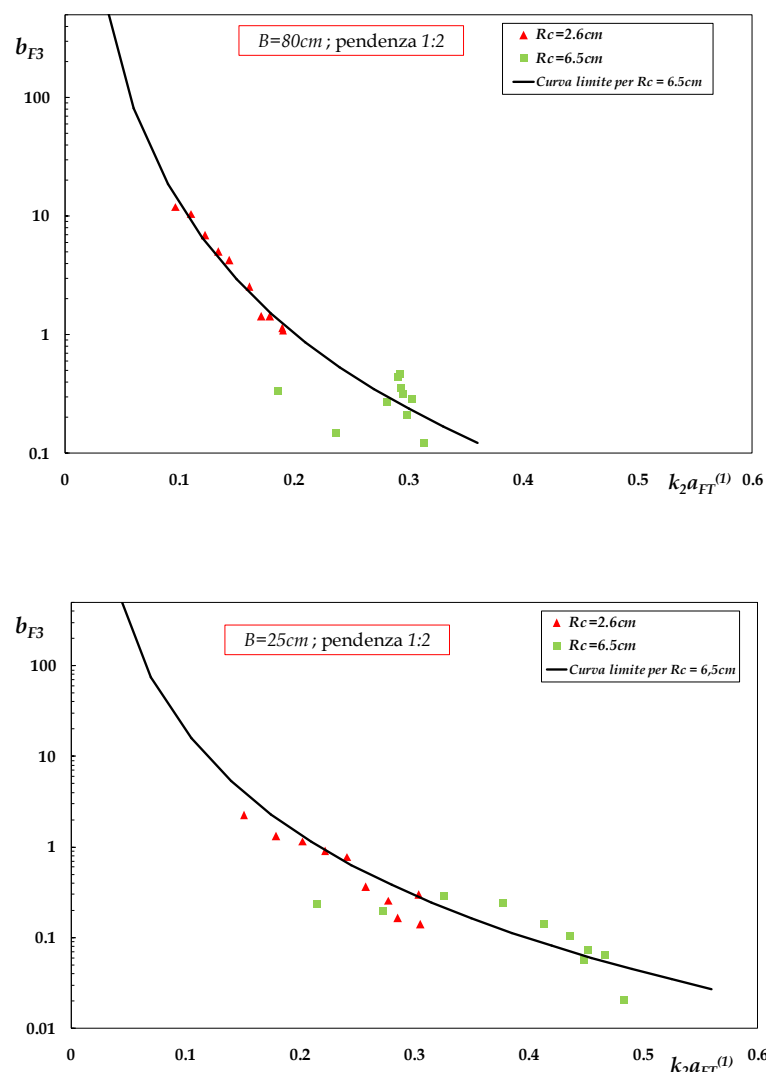


Figura 6.84. Andamento  $b_{F3}$  in funzione di  $k_2 a_{FT}^{(1)}$  per le due configurazioni strutturali esaminate con pendenza 1:2.

### Lag di fase iniziale tra le componenti trasmesse del I e del II ordine

Il grafici di Figura 6.85 indicano come lo sfasamento iniziale tra la componente principale e la seconda super-armonica libera non sia influenzato dalla variazione di sommergenza, né per struttura stretta né per struttura larga. In ogni caso, per valori elevati di  $k_s a_{FT}^{(1)}$ , i valori di saturazione del lag di fase sembrano essere, specialmente per strutture con coronamento ridotto, ben interpolati dalla curva limite rappresentata nel grafico 6.86 da una linea a tratto continuo.

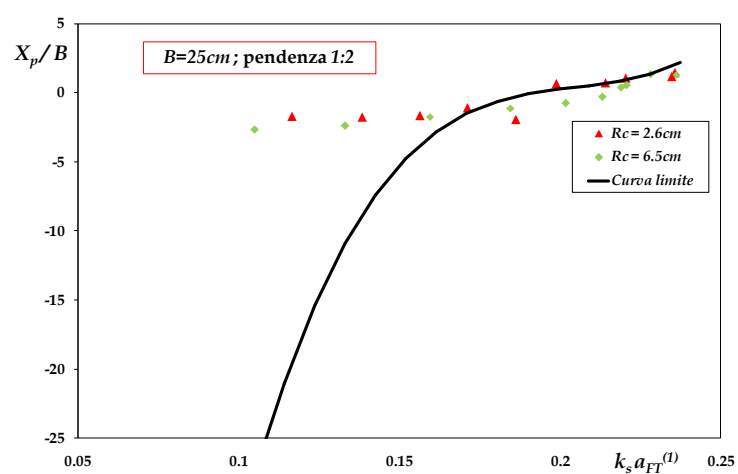
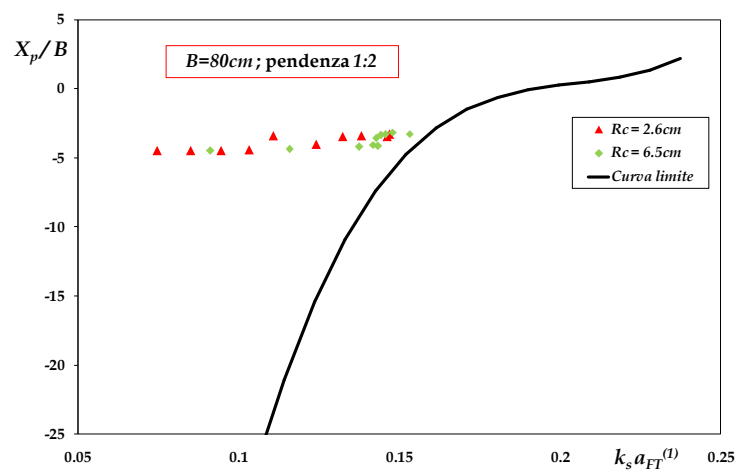


Figura 6.85. Andamento del rapporto  $X_p/B$  in funzione di  $k_s a_{FT}^{(1)}$ .

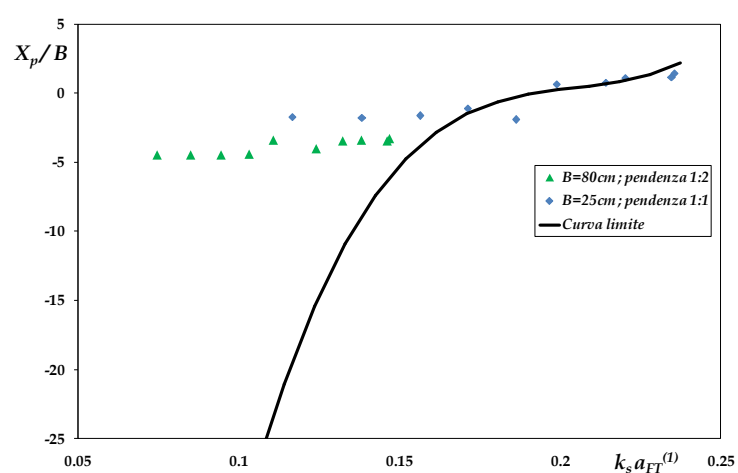


Figura 6.86. Andamento del rapporto  $X_p/B$  in funzione di  $k_s a_{FT}^{(1)}$  per le due strutture con pendenza 1:2 ed  $R_c=2.6cm$ .



### Intensità delle interazioni tra le componenti libere

Nella Figura 6.87 è riportata la potenza associata alla componente di interferenza del III ordine, relativa alla potenza media trasmessa, in funzione dell'altezza d'onda incidente relativa. Le curve riferite alle configurazioni strutturali con tirante basso sono confrontate con le medesime curve che si riferiscono ai valori di  $R_c$  più elevati. Si nota come l'aumento di  $R_c$  determini una riduzione degli effetti di interazione tra le componenti libere nonostante sia stato ben documentato che le strutture con tiranti minori generino maggiori effetti non lineari. In realtà, i bassi tiranti danno luogo a processi dissipativi più importanti e di conseguenza, come osservato precedentemente, ad una riduzione maggiore della componente fondamentale che, d'altra parte, gioca un ruolo importante sulla generazione delle onde di interferenza. Il risultato netto è che una riduzione del tirante sulla berma è accompagnata da una diminuzione degli effetti di interazione tra triplette.

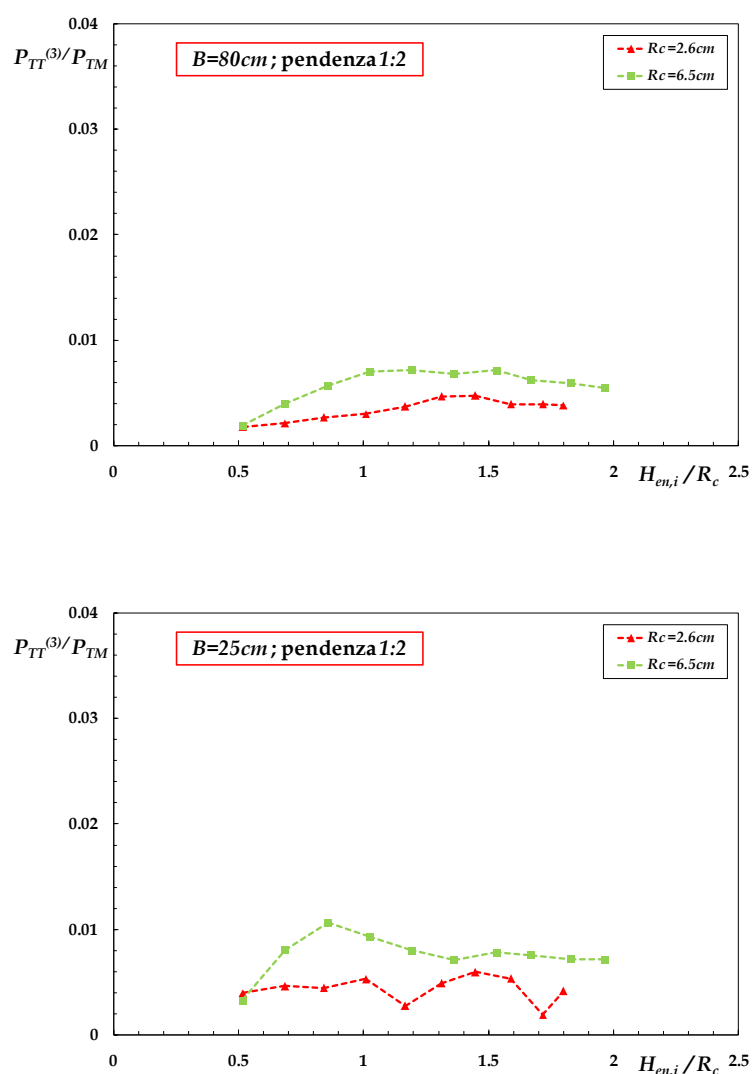


Figura 6.87. Andamento del rapporto  $P_{TT}^{(3)}/P_{TM}$  in funzione di  $H_{en,i}/R_c$ .

## Capitolo 7. Analisi e modellazione del processo di trasmissione non lineare

### 7.1 Generalità

Nonostante le ricerche richiamate nel corso del Capitolo 3, corroborate dai risultati sperimentali mostrati nel capitolo precedente, sottolineino con decisione il carattere fortemente non lineare del processo di trasmissione, nelle pratiche applicazioni quest'ultimo viene modellato in un ambito sostanzialmente lineare, immaginando che il segnale incidente venga semplicemente “scalato” dalla struttura secondo lo schema di Figura 7.1.

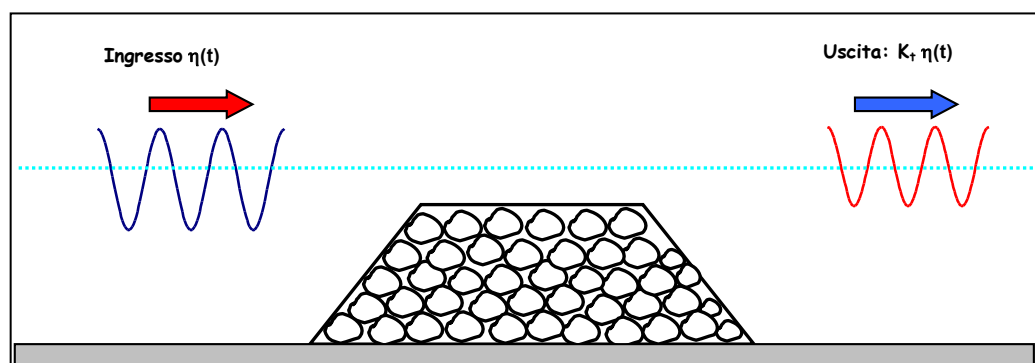


Figura 7.1. Schema di funzionamento lineare di una barriera sommersa.

In realtà il ricorso all'approccio lineare non viene mai esplicitamente dichiarato; tuttavia esso può essere agevolmente postulato dalla notevolissima attenzione rivolta, nel corso degli ultimi sessanta - settanta anni, verso gli strumenti di previsione del cosiddetto *coefficiente di trasmissione*  $K_T$ . Quest'ultimo rappresenta il rapporto tra la deviazione standard del processo di elevazione d'onda nell'area protetta e l'analoga quantità relativa al moto ondoso incidente, e possiede i caratteri espliciti di un coefficiente di “gain” di un sistema lineare (modulo della ideale funzione di trasferimento tra il moto ondoso incidente e quello trasmesso).

È interessante notare che nel corso degli ultimi dodici anni sono state pubblicate, su riviste specializzate in lingua inglese ed atti di convegni internazionali, almeno sette formule empiriche o semi-empiriche di previsione [d'Angremond et al. (1997), Seabrook e Hall (1998), Calabrese et al. (2002), Wamsley ed Ahrens (2003), van der Meer et al. (2005), Buccino e Calabrese (2007), Goda e Ahrens (2008)] che si aggiungono a due approcci del tipo “Neural-Network” [Panizzo e Briganti (2007), Van Oosten et al. (2006)]. In aggiunta Bellotti (2004) e Calabrese, Vicinanza e Buccino (2008) hanno inequivocabilmente adoperato proprio lo schema lineare appena descritto nello studio del processo di risalita del livello medio a tergo di barriere sommerse.

Ora, il moltiplicarsi delle formule di previsione in un breve arco temporale è presumibilmente indice di una significativa incertezza nella stima della variabile e la sorgente principale di tale incertezza potrebbe in realtà risiedere nella intrinseca inadeguatezza dell'approccio lineare, e cioè nel fatto che la presenza della barriera

impone al moto ondoso incidente delle trasformazioni che potrebbero non essere descritte in maniera adeguata dal modello di Figura 7.1 (Figura 7.2).

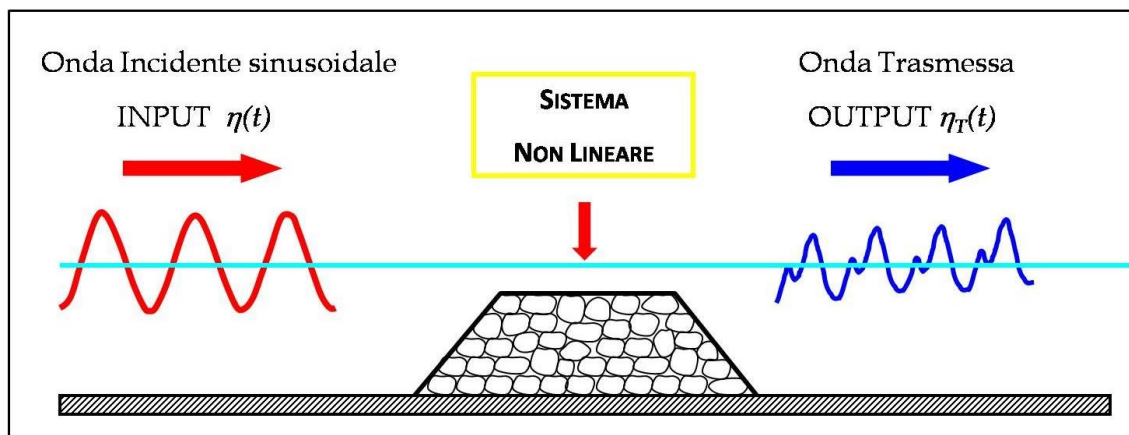


Figura 7.2. Schema di funzionamento non lineare di una barriera sommersa.

In effetti le fluttuazioni dei modi di Fourier documentate nel capitolo precedente hanno inevitabilmente effetti diretti sulle proprietà del coefficiente di trasmissione definito come sopra. A tal proposito si è scelto di aggiungere alla locuzione “coefficiente di trasmissione” il termine “globale” proprio per sottolineare i caratteri non lineari del campo d’onda trasmesso dietro la struttura.

Nel paragrafo immediatamente seguente si affronterà una discussione riguardo le possibili incertezze nella stima e nella misura di  $K_T$ , che derivano dalla non linearità del processo di trasmissione.

Nella seconda parte invece sarà proposta una metodologia di stima della seconda super-armonica libera richiamando i concetti della teoria del battimento non lineare che d’altra parte hanno costituito un termine di paragone costante nel corso di questo lavoro.

## 7.2 Il coefficiente di trasmissione globale

### 7.2.1 Generalità ed analisi qualitativa dei dati

Come discusso nel precedente paragrafo introduttivo il processo di trasmissione a tergo delle barriere sommerse viene generalmente studiato mediante un “coefficiente di trasmissione globale”  $K_T$ , il quale possiede i caratteri di un coefficiente di “gain” di un sistema lineare.

Tale parametro viene generalmente misurato mediante il rapporto tra la radice quadrata del momento di ordine zero dello spettro di potenza nell’area protetta (trasmesso) e l’analoga quantità (incidente) calcolata in assenza dell’opera:

$$K_t = \sqrt{\frac{m_{0T}}{m_{0i}}} \quad [7.1]$$

Esso dunque rappresenta il rapporto tra le deviazioni standard del processo di elevazione d'onda rispettivamente alle spalle e dinanzi la struttura.

Sino al secondo ordine di approssimazione di Stokes,  $K_T$  è anche pari alla radice quadrata del rapporto tra l'energia meccanica del moto ondoso trasmesso,  $E_T$ , e quella incidente,  $E_i$ ; poiché allo stesso ordine di approssimazione si ha:

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad [7.2]$$

è evidente che :

$$K_T = \frac{H_T}{H_i} \quad [7.3]$$

Ora, il processo di fluttuazione delle componenti di Fourier studiato nel corso del capitolo precedente introduce alcune incertezze riguardo sia il significato reale del coefficiente di trasmissione globale sia riguardo le stime che di esso si effettuano in laboratorio.

Dalla teoria generale dei segnali si ha infatti che la varianza di un segnale periodico è pari alla semi somma dei quadrati delle ampiezze di Fourier che lo compongono:

$$m_0 = \sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_n A_{n\omega}^2 \quad [7.4]$$

Stante la caratteristica natura oscillatoria dei modi armonici trasmessi, a fronte di una sostanziale stazionarietà di quelli in assenza di struttura (si vedano Figure 6.18-6.20 del capitolo precedente), è del tutto naturale attendersi una fluttuazione del coefficiente di trasmissione globale  $K_T$ . A tale proposito si consideri la Figura 7.3, che si riferisce ad un test eseguito in presenza della struttura nucleata con berma stretta ( $B=25cm$ ) con parametri ondosi  $H_i=6cm$  e  $T=1s$ .

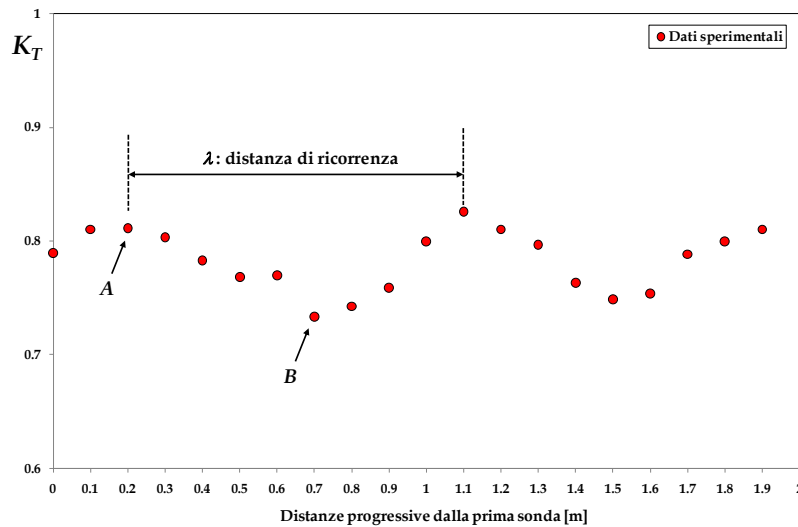


Figura 7.3. Fluttuazione del coefficiente di trasmissione globale;  
[Struttura 2,  $B=25cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ,  $H_i=6cm$ ,  $T=1s$ ]

L'indice globale di trasmissione sembra variare ritmicamente lungo il canale e, come atteso, la lunghezza caratteristica di oscillazione è approssimativamente pari a

$$\lambda = \frac{\pi}{(0.5k_2 - k_1)} \quad [7.5]$$

È interessante sottolineare che l'intervallo di oscillazione ha un'ampiezza di 0.1, essendo i valori rilevati compresi tra 0.75 e 0.85. Tale ampiezza è pari alla semi banda delle fasce di confidenza (con un livello di probabilità del 90%) di praticamente tutte le formule empiriche per il calcolo di  $K_T$ . Dunque, confrontando i dati sperimentali con una formula empirica potrebbe verificarsi il caso nel quale, misurando il punto "A" in Figura 7.3, il valore misurato coincida con quello previsto dalla formula (indicando un potere previsionale dell'equazione empirica molto soddisfacente) mentre misurando nel punto "B" il dato sperimentale giacerebbe sul limite della semi banda di confidenza, generando la sensazione che il modello empirico tenda a sovrastimare, o sottostimare, i dati misurati.

Un'altra situazione di interesse è quella mostrata in Figura 7.4.

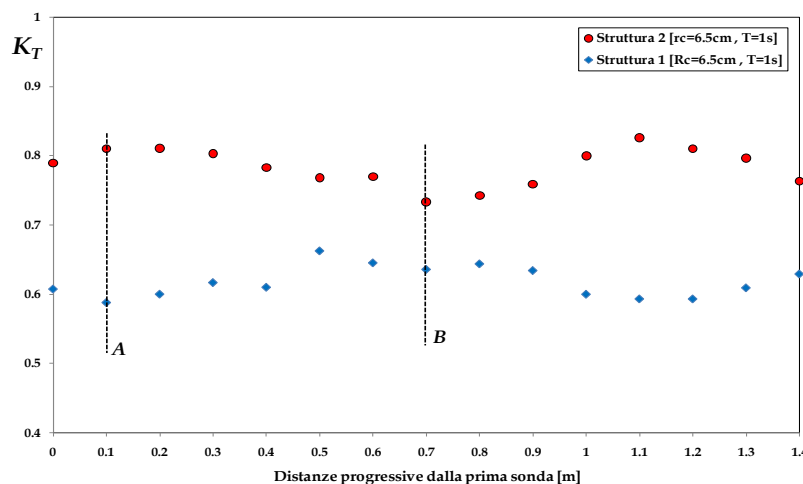


Figura 7.4. Confronto tra la fluttuazione di  $K_T$  per struttura nucleate a coronamento stretto ( $B=25cm$ ) e coronamento largo ( $B=80cm$ ); [ $R_c=6.5cm$ ,  $T=1s$ ].

Il grafico mostra gli effetti dell'ampiezza del coronamento (a parità di ogni altro fattore) sull'andamento del coefficiente di trasmissione globale. La figura indica come le due oscillazioni abbiano, come atteso, la stessa lunghezza d'onda, presentandosi però in opposizione di fase. Tale evenienza potrebbe condurre ad erronee conclusioni riguardo l'influenza della larghezza della cresta, aspetto molto importante (ed oggetto di numerose pubblicazioni) in quanto esso condiziona l'impatto economico dell'opera in oggetto. Misurando dunque nella sezione "A" condurrebbe alla conclusione che una struttura più ampia determini una rilevantisima laminazione dell'agitazione a tergo con una riduzione del coefficiente di trasmissione di 0.24 (in termini percentuali il 30% di riduzione); al contrario, effettuando la rilevazione nella sezione "B" si potrebbe dedurre che il significativo incremento di spesa relativo all'ampliamento del coronamento conduca ad effetti limitati o moderati in termini di riduzione

dell'agitazione (la riduzione del coefficiente di trasmissione è pari a 0.10, il 15% in termini percentuali). A completamento di questa discussione si noti che tra le due strutture l'area varia tra  $S_1=0.172m^2$  ad  $S_2=0.31m^2$  con un incremento percentuale di circa il 80% a cui corrisponderà un pari aumento di costo del manufatto di progetto.

Il risultato appena presentato ricorda molto da vicino quello pubblicato da Gómez Pina and Valdés (1990), con riferimento al moto ondoso irregolare. La Figura 7.5 riporta il diagramma n. 8 dell'articolo in questione. Anche qui risulta evidente che l'altezza d'onda trasmessa fluttui nello spazio e che vi sia una opposizione di fase tra i due casi  $B=0.80m$  e  $B=1.20m$ . Tuttavia, gli Autori non sembrano fornire alcun commento o spiegazione del fenomeno osservato limitandosi ad evidenziarne la rilevazione. Essi conclusero che: *"submerged breakwaters could (under certain conditions) be not as efficient as one might think, when the evolution of the transmitted wave parameters are compared in the characteristic zone"*.

Sfortunatamente nella ricerca di Gómez Pina and Valdés (1990) non sono indicati i parametri sperimentali cui la Figura 7.5 si riferisce e pertanto non è stato possibile verificare se la lunghezza di oscillazione dell'altezza d'onda trasmessa coincidesse o meno con il "beat length" di Equazione [7.5].

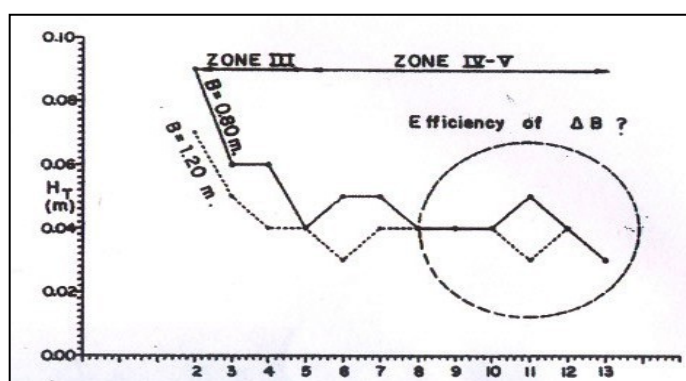


Figura 7.5. Esempio di evoluzione dell'altezza d'onda trasmessa a tergo di una barriera sommersa; Gomez Pina et al. (1990).

Si ponga infine attenzione al grafico di Figura 7.6; qui, a parità di configurazione strutturale (larghezza di cresta e sommergenza) l'altezza d'onda incidente di target è stata fatta variare da  $H_i=4cm$  ad  $H_i=12cm$ ; i dati sembrano oscillare in fase gli uni rispetto agli altri, ma le altezze (cresta-cavo) delle oscillazioni sembrano progressivamente ridursi all'aumentare dell'altezza d'onda incidente e, dunque, del tasso di dissipazione per effetto del frangimento (Figura 7.7).

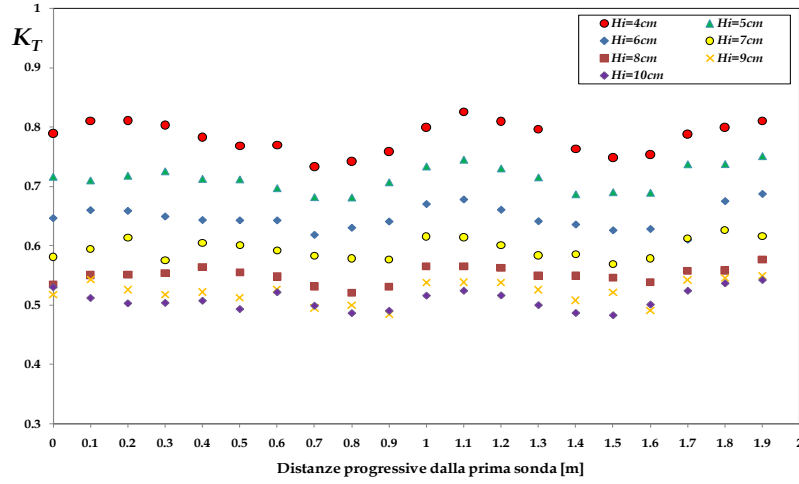


Figura 7.6. Fluttuazioni di  $K_T$  al variare dell'altezza d'onda incidente di target; [Struttura 2,  $B=25\text{cm}$   $R_c=6\text{cm}$ ,  $T=1\text{s}$ ].

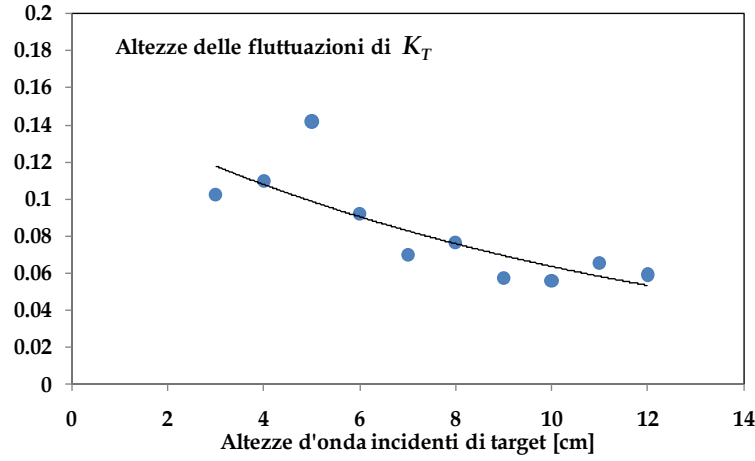


Figura 7.7. Andamento dell'altezza (cresta-cavo) delle oscillazioni di  $K_T$  al variare di  $H_i$ ; [Struttura 2,  $B=25\text{cm}$   $R_c=6\text{cm}$ ,  $T=1\text{s}$ ].

Ciò testimonierebbe una progressiva parziale linearizzazione del processo in gioco.

### 7.2.2 Analisi non lineare dell'indice globale di trasmissione ( $K_T$ )

Alcune delle proprietà discusse in precedenza possono essere studiate ed approfondite muovendo dalle analisi svolte nel corso del Paragrafo 6.3 a proposito delle fluttuazioni delle componenti di Fourier del moto ondoso trasmesso. In particolare, sulla base dei risultati ottenuti, poniamo<sup>1</sup>:

$$A_{\omega}^2 = [a^{(1)}]^2 \cdot [1 + K_{R\omega}^2 + 2K_{R\omega} \cdot \cos(2k_1 + \varepsilon)] \quad [7.6]$$

$$A_{2\omega}^2 = [a_B^{(2)}]^2 + [a_F^{(2)}]^2 + 2a_B^{(2)}a_F^{(2)} \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] \quad [7.7]$$

<sup>1</sup> Si noti che tutte le quantità espresse nelle equazioni che seguono sono intese come "trasmesse" dietro la struttura omettendo il pedice "T".

$$A_{3\omega}^2 = \left[a_{T3}^{(3)}\right]^2 + \left[a_F^{(3)}\right]^2 + 2a_{T3}^{(3)}a_F^{(3)} \cdot \cos\{[k_3 - (k_2 + k_1)]x + \Delta\varphi_{T3}\} \quad [7.8]$$

si ottiene così la seguente espressione della varianza del moto ondoso trasmesso:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= \frac{1}{2} [A_\omega^2 + A_{2\omega}^2 + A_{3\omega}^2] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(a^{(1)}\right)^2 \cdot (1 + K_{R\omega}^2) + \left(a_B^{(2)}\right)^2 + \left(a_F^{(2)}\right)^2 + \left(a_{T3}^{(3)}\right)^2 + \left(a_F^{(3)}\right)^2 \right] + \\ &\quad + K_{R\omega} \left(a^{(1)}\right)^2 \cdot \cos(2k_1 + \varepsilon) + \\ &\quad + a_B^{(2)} \cdot a_F^{(2)} \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] + \\ &\quad + a_{T3}^{(3)} \cdot a_F^{(3)} \cdot \cos\{[k_3 - (k_2 + k_1)]x + \Delta\varphi_{T3}\} \end{aligned} \quad [7.9]$$

Quest'ultima è dunque somma di una componente costante (continua), cui si sovrappongono delle fluttuazioni a media nulla e di diversa lunghezza d'onda.

Ponendo ora:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \left(a^{(1)}\right)^2 \cdot (1 + K_{R\omega}^2) + \left(a_B^{(2)}\right)^2 + \left(a_F^{(2)}\right)^2 + \left(a_{T3}^{(3)}\right)^2 + \left(a_F^{(3)}\right)^2 \right] &= \overline{\sigma^2} \\ K_{R\omega} \left(a^{(1)}\right)^2 &= \alpha \\ a_B^{(2)} \cdot a_F^{(2)} &= \beta \\ a_{T3}^{(3)} \cdot a_F^{(3)} &= \gamma \end{aligned} \right. \quad [7.10]$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) - \overline{\sigma^2} &= \alpha \cdot \cos(2k_1 + \varepsilon) + \beta \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] + \\ &\quad + \gamma \cdot \cos\{[k_3 - (k_2 + k_1)]x + \Delta\varphi_{T3}\} \end{aligned} \quad [7.11]$$

Che può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) - \overline{\sigma^2} &= \alpha \cdot \cos\{(k_2x + \Delta) - [(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}]\} + \\ &\quad + \beta \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] + \\ &\quad + \gamma \cdot \{[(k_3 - 3k_1)x + \rho] - [(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}]\} \end{aligned} \quad [7.12]$$



in cui :

$$\begin{cases} \Delta = \varepsilon + \alpha_{F2} \\ \rho = \Delta \varphi_{T3+\alpha_{F2}} \end{cases} \quad [7.13]$$

applicando le formule di prostaferesi otteniamo:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) - \overline{\sigma^2} &= \overbrace{\{\alpha \cdot \cos(k_2x + \Delta) + \beta + \gamma \cdot \cos[(k_3 - 3k_1)x + \rho]\}}^{C_x} \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] + \\ &+ \underbrace{\{\alpha \cdot \sin(k_2x + \Delta) + \gamma \cdot \sin[(k_3 - 3k_1)x + \rho]\}}_{D_x} \sin[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] \end{aligned} \quad [7.14]$$

La quale può evidentemente scriversi come:

$$\sigma^2(x) - \overline{\sigma^2} = A_x \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2} + \Gamma_x] \quad [7.15]$$

in cui:

$$\begin{cases} A_x^2 = D_x^2 + C_x^2 \\ tg\Gamma_x = -\frac{D_x}{C_x} \end{cases} \quad [7.16]$$

In definitiva, mettendo in evidenza  $a_B^{(2)}$  e  $a_F^{(2)}$  e dividendo entrambi i membri dell'equazione precedente per la varianza del processo di elevazione d'onda in assenza di struttura ( $\sigma_i^2$ ) si ottiene:

$$\begin{aligned} K_T^2 - \overline{K_T^2} &= \\ &= \frac{a_B^{(2)} a_F^{(2)}}{\sigma_i^2} \cdot \\ &\cdot \sqrt{1 + X^2 + Y^2 + 2X\cos(k_2x + \Delta) + 2XY[\cos(k_2 + 3k_1 - k_3)x + \Delta - \rho] + 2Y\cos[(k_3 - 3k_1)x + \rho]} \cdot \\ &\cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + (\alpha_{F2} + \Gamma_x)] \end{aligned} \quad [7.17]$$

In cui:

$$\begin{cases} X = \frac{K_{R\omega} \cdot (a^{(1)})^2}{a_B^{(2)} \cdot a_F^{(2)}} \\ Y = \frac{a_{T3}^{(3)} \cdot a_F^{(3)}}{a_B^{(2)} \cdot a_F^{(2)}} \end{cases} \quad [7.18]$$

Il termine sotto radice quadrata definisce l'involuppo della fluttuazione di  $K_T^2$  intorno al proprio valor medio; esso si compone di una quantità costante:

$$\tilde{R} = \frac{a_B^{(2)} a_F^{(2)}}{\sigma_i^2} \cdot \sqrt{1 + X^2 + Y^2} \quad [7.19]$$

cui si sommano (in senso ideale) una serie di modulanti a media nulla associate alle interferenze tra le diverse componenti. D'altra parte guardando la costante di fase iniziale all'interno del termine cosinusoidale principale nell'Equazione 7.17, osserviamo che il termine  $\Gamma_x$  rappresenta una modulazione di  $\alpha_{F2}$  anch'essa a media zero. In definitiva trascurando tutte queste modulanti potremmo scrivere in maniera approssimata:

$$K_T^2 - \overline{K_T^2} = \frac{a_B^{(2)} a_F^{(2)}}{\sigma_i^2} \cdot \overbrace{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}}^{\tilde{R}} \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}] \quad [7.20]$$

Si ha quindi che il primo fattore del prodotto a secondo membro definisce, almeno in via approssimata, l'ampiezza attesa della fluttuazione del coefficiente di trasmissione al quadrato; quanto più essa sarà piccola tanto più  $K_T$  sarà costante con  $x$ .

Si noti che l'assenza di fluttuazione di  $K_T$  non è necessariamente associata ad un'assenza di non linearità nel processo. È evidente che se i fondali a tergo dell'opera sono sufficientemente alti, la componente stokiana del II ordine sarà del tutto trascurabile annullando così l'ampiezza della fluttuazione nell'Equazione [7.20]. In tal caso non vi sarà alcuna oscillazione dello spettro di Fourier, ma il processo continuerà ad essere non lineare, con il profilo dell'onda nel dominio del tempo che continuerà a fluttuare con lunghezza di ricorrenza  $\lambda$ .

È questo il caso dello studio pubblicato da Grue nel 1992 e recensito nella prima parte di questo lavoro.

Un altro caso di assenza di fluttuazione in presenza di processo non lineare è quello di acque molto basse, in cui  $k_2 = 2k_1$  e la lunghezza di ricorrenza tende ad infinito, comportando così l'assenza di oscillazione anche degli indici di asimmetria. Al contrario, solo se  $a_F^{(2)}$  si annulla, l'estinguersi dell'ampiezza di fluttuazione di  $K_T$  implica la linearizzazione del processo di trasmissione.

L'ampiezza di oscillazione della [7.19] è dunque un parametro interessante per l'analisi delle caratteristiche della risposta idraulica; si noti inoltre che, poiché il coefficiente di riflessione non fa parte del processo di trasmissione, la [7.19] può ulteriormente semplificarsi nella:

$$\tilde{R} = \frac{a_B^{(2)} a_F^{(2)}}{\sigma_i^2} \cdot \sqrt{1 + Y^2} \quad [7.21]$$

Infine, dalle espressioni precedenti il coefficiente di trasmissione globale può esprimersi come:

$$K_T = \sqrt{K_T^2 + \tilde{R} \cdot \cos[(k_2 - 2k_1)x + \alpha_{F2}]} \quad [7.22]$$

In Figura 7.8 l'Equazione [7.22] è stata confrontata con i dati sperimentali relativi ai medesimi test mostrati in Figura 7.4. La curva teorica è stata calcolata attribuendo ai vari parametri in gioco i valori stimati come descritto nel capitolo precedente. L'accordo con i dati è complessivamente soddisfacente, anche se qualche maggiore differenza si riscontra per  $B=80cm$  probabilmente a causa della operazione di "smoothing" effettuata sulle ampiezze e sulle fasi delle oscillazioni. Ciò testimonia in qualche misura la ragionevolezza dell'analisi sin qui svolta.

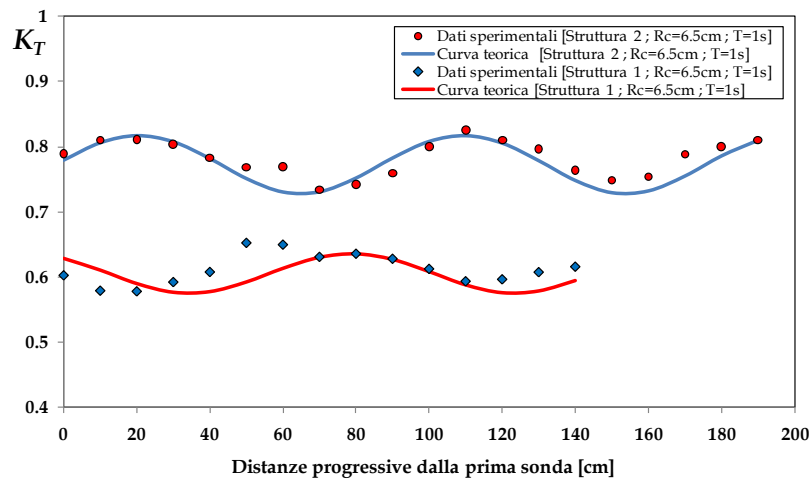


Figura 7.8. Confronto tra i dati sperimentali relativi ai test con  $T=1s$  mostrati in Figura 7.4 e la curva teorica calcolata mediante la [7.22].

L'espressione "teorica" del coefficiente di trasmissione globale può essere utile anche per estendere l'analisi al caso dei periodi più lunghi.

La Figura 7.9 si riferisce alle medesime condizioni strutturali di cui alla Figura 7.8; soltanto il periodo è stato variato essendo qui  $T=2s$ . Se limitiamo l'analisi alla sola finestra di misura (Figura 7.9a) il coefficiente di trasmissione sembrerebbe approssimativamente costante; ciò in realtà dipende dal fatto che la lunghezza di *beat* è molto maggiore della finestra di analisi come mostrato nella Figura 7.9b, la quale sottolinea anche il buono accordo tra i dati sperimentali e le curve teoriche riportate a tratto continuo. In pratica ciascuna delle curve (si noti che qui esse oscillano approssimativamente in fase a differenza di quelle relative alla Figura 7.8) ha escursione cresta-cavo dell'ordine di 0.1 che tuttavia si completa molto lentamente. Così, avendo in teoria a disposizione un canale di lunghezza infinita, esistono ampie porzioni (diciamo della lunghezza dell'ordine di  $1m$ ) nelle quali si può misurare o esclusivamente il valore limite superiore o esclusivamente il valore limite inferiore e questo costituisce senz'altro una sorgente di incertezza nelle indagini riguardo  $K_T$ .

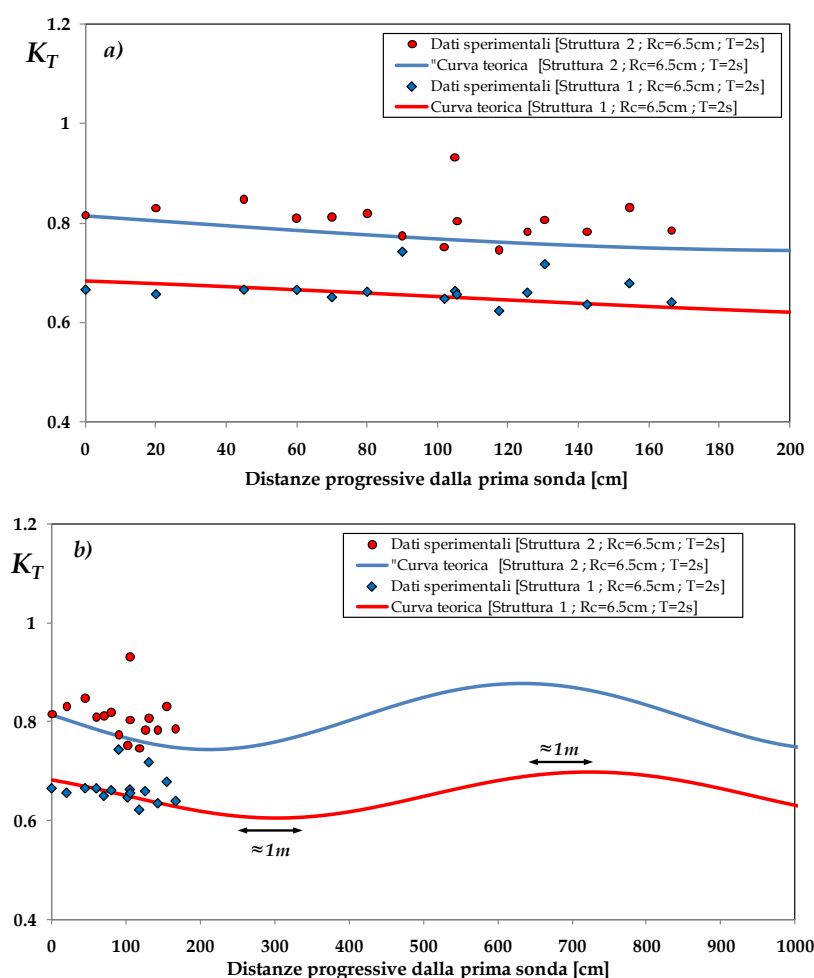


Figura 7.9. Confronto tra i dati sperimentali relativi ai test con  $T=2s$  e la curva teorica calcolata mediante la [7.22].

Un ulteriore spunto è fornito dalla Figura 7.10 che confronta a parità di configurazione strutturale le curve teoriche relative ad  $H_i=4cm$  e periodo rispettivamente  $T=1s$  e  $T=2s$ . Limitando il confronto alla sola finestra di analisi si nota come il differenziale della lunghezza di ricorrenza (molto maggiore per  $T=2s$ ) determina (a parità di valor medio) delle zone nelle quali l'effetto del periodo può considerarsi amplificatore del coefficiente di trasmissione o riduttore di esso.

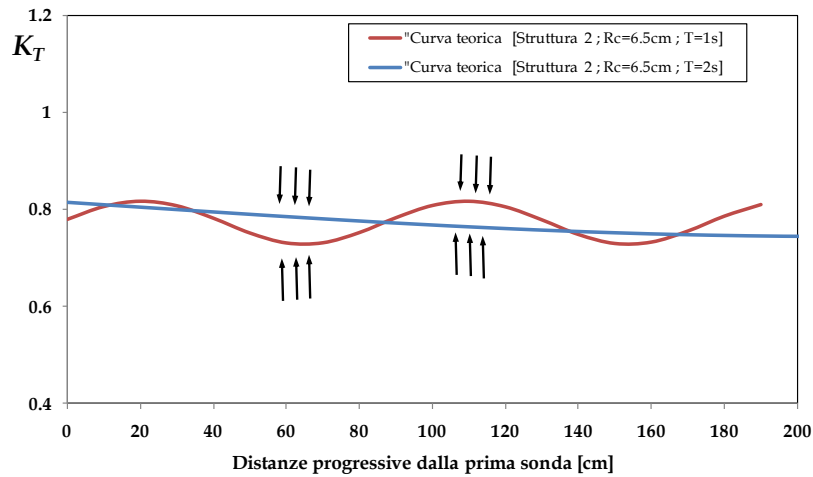


Figure 7.10. Confronto tra le curve teoriche per  $T=1s$  e  $T=2s$  con riferimento ad  $H_i=4cm$  ed alla medesima configurazione strutturale; [Struttura 2,  $B=25cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ].

È infine certamente interessante studiare, per le diverse configurazioni strutturali qui esaminate, e per i diversi attacchi ondosi, il valore attinto dalla quantità  $\tilde{R}$ ; si noti che, a causa delle profondità relative cui sono stati effettuati gli esperimenti di questo studio, una sua riduzione implica necessariamente una linearizzazione del processo.

Discutiamo innanzitutto i risultati relativi alle onde di periodo  $T=1s$ . I grafici di Figura 7.11 mostrano l'andamento del fattore  $\tilde{R}$  in funzione dell'altezza d'onda relativa di target,  $H_i / R_c$ , al variare della larghezza del coronamento e per configurazioni strutturali con sommergenza elevata ( $R_c=6.5cm$ ). Si nota che l'ampiezza delle oscillazioni dell'indice globale di trasmissione è maggiore per le strutture con  $B=25cm$  rispetto a  $B=80cm$ . Ciò è maggiormente evidente nella zona che corrisponde alle prime altezze d'onda frangenti (la transizione "non-frangimento/frangimento" è come d'abitudine indicata da un segmento verticale tratteggiato). Quanto osservato è evidente sia per strutture nucleate (grafico a sinistra) sia per strutture omogenee (grafico a destra).

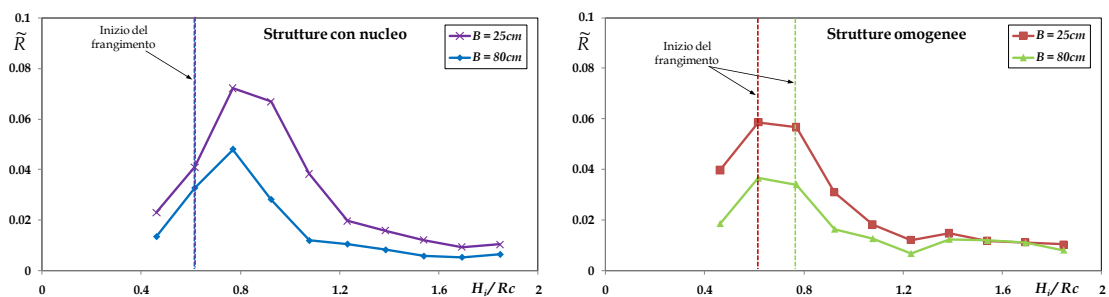


Figura 7.11. Influenza della larghezza del coronamento sull'andamento del fattore  $\tilde{R}$  in funzione di  $H_i$ ; barriere nucleate (sinistra) e barriere omogenee (destra).

Un confronto simile viene proposto in Figura 7.12 tra strutture nucleate e strutture omogenee (a parità di  $B$ ). Le strutture con nucleo, in special modo quelle a coronamento stretto, sembrerebbero favorire fluttuazioni maggiori del coefficiente di

trasmissione a parità di ogni altro fattore, soprattutto per le onde di “primo frangimento”.

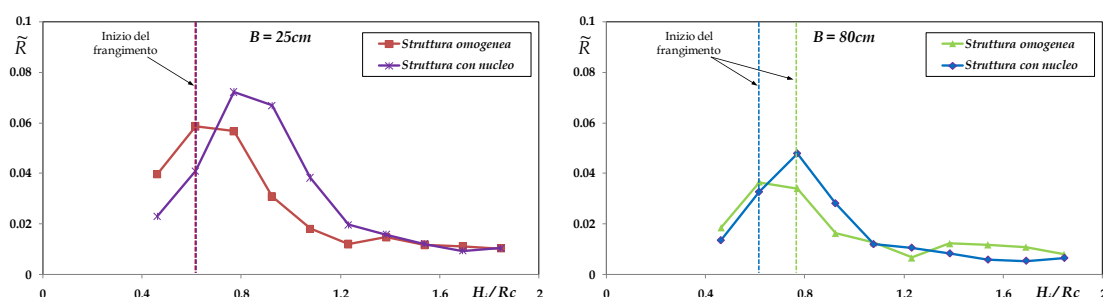


Figura 7.12. Influenza della porosità sull'andamento del fattore  $\tilde{R}$  in funzione di  $H_i$ ;  $B=80\text{cm}$  (sinistra) e  $B=25\text{cm}$  (destra).

L'effetto del periodo è, invece, mostrato in Figura 7.13, la quale mostra come per le onde più lunghe l'ampiezza delle oscillazioni dell'indice di trasmissione globale sia maggiore.

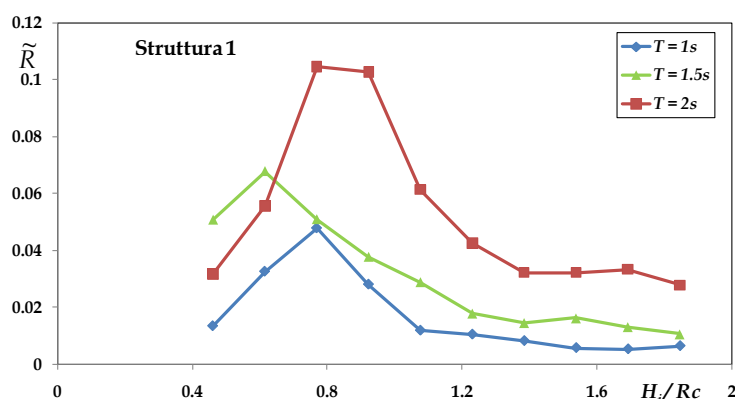


Figura 7.13. Influenza del periodo sull'andamento del fattore  $\tilde{R}$ ; [Struttura 1,  $B=80\text{cm}$ ,  $R_c=6.5\text{cm}$ ]

Ciò che è comunque interessante notare sulla base dei grafici precedenti è che, per valori grandi delle altezze d'onda incidenti e, dunque, per frangimenti ben sviluppati, il fattore  $\tilde{R}$  si riduce drasticamente tendendo ad un valore apparentemente molto contenuto (Figura 7.14). Tale fatto, comune a tutte le configurazioni strutturali, sembra suggerire che quando i fenomeni dissipativi divengono importanti, le “distorsioni” generate dall'interazione onda-struttura tendano a ridursi favorendo un processo di trasmissione sempre più lineare.

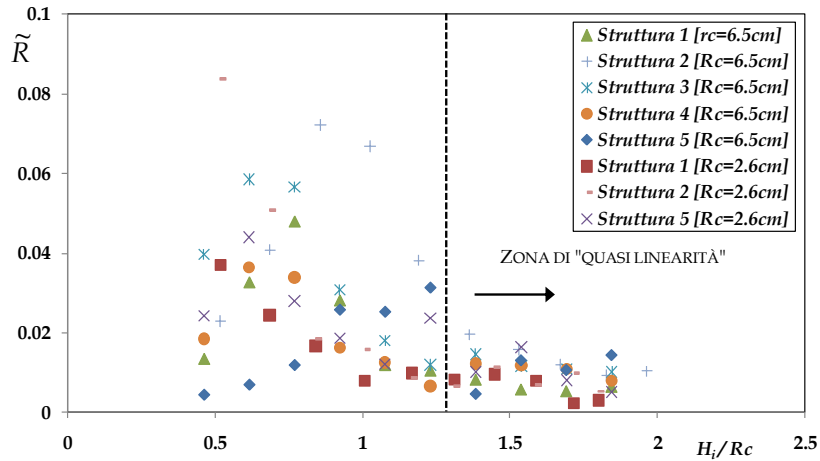


Figura 7.14. Andamento di  $\tilde{R}$  in funzione di  $H_i$  per onde di periodo  $T=1s$  e per tutte le configurazioni strutturali esaminate.

### 7.3 Stima della componente non lineare dell'interazione onda- struttura

Nel corso di diversi momenti di questo lavoro di tesi è stata segnalata la possibilità che la risposta non lineare delle barriere agli attacchi ondosi attinga un qualche valore asintotico in specie per effetto dei frangimenti più intensi.

Il caso più evidente riguarda l'indice di amplificazione delle componenti libere non lineari  $b_{F2}$  che è stato definito come:

$$b_{F2} = \frac{a_{FT}^{(2)}}{k_2 \left(a_{FT}^{(1)}\right)^2} \quad [7.23]$$

In effetti durante la discussione analitica svolta nell'ambito del Capitolo 6 si è mostrato come per qualsiasi configurazione strutturale esista una funzione limite:

$$b_{F2} = f \left(a_{FT}^{(1)}\right) \quad [7.24]$$

che involuppa i dati sperimentali "verso destra"; in particolare, come mostrato dalla Figura 6.61a, che si riporta qui per facilitare la discussione, al crescere del "segnale principale trasmesso"  $\left[k_1 a_{FT}^{(1)}\right]$ , il coefficiente di non linearità  $b_{F2}$  sembrerebbe essere dapprima funzione unicamente della profondità relativa  $k_1 h$ ; così, per ciascun valore del periodo, i dati "danno la sensazione" di descrivere dei segmenti approssimativamente orizzontali, per poi attingere una curva limite comune che, come risulta dal Capitolo 6, raggruppa i dati sperimentali sempre in maniera estremamente correlata.

Sembrerebbe, dunque, esistere una forma di saturazione della componente libera non lineare al crescere della componente dominante della trasmissione.

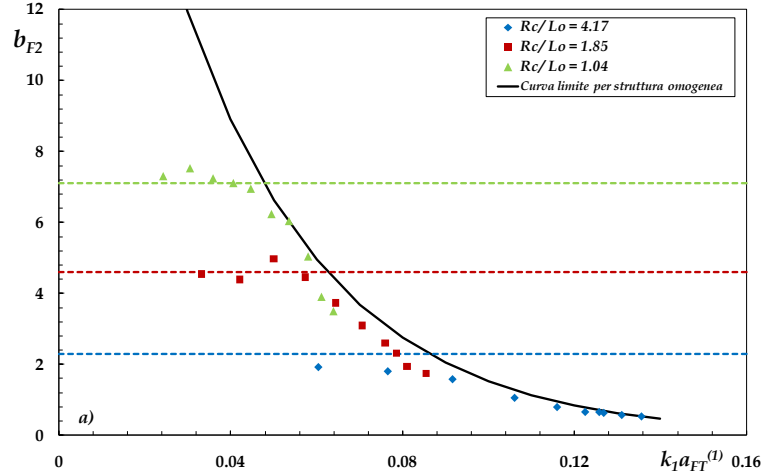


Figura 6.61a. Fattore di proporzionalità  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$  [ $B=25cm$ ].

Nello stesso capitolo precedente si è mostrato poi come un effetto di saturazione sia probabilmente presente anche con riferimento al differenziale di fase iniziale tra le componenti libere del I e del II ordine; come mostrato dalla Figura 6.48, del tutto analoga alla 6.61a, il *lag* sembrerebbe costante per ogni valore del periodo, ma limitato verso destra da una analoga funzione di inviluppo.

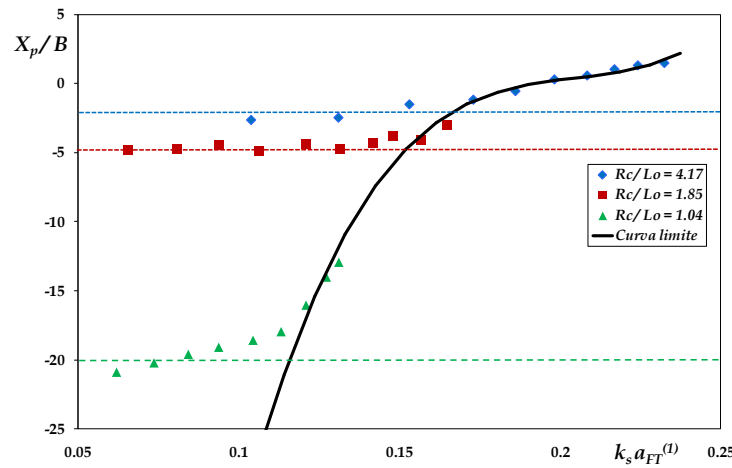


Figura 6.48. Andamento del rapporto  $X_p/B$  in funzione di  $k_s a_{FT}^{(1)}$ .

Quanto sino ad ora esposto per la componente di pulsazione  $2\omega$  è con tutta evidenza valido anche per quella  $3\omega$ ; ciò è stato segnalato a più riprese nel corso del Capitolo 6 e può essere ribadito di seguito mediante le Figure 6.56.



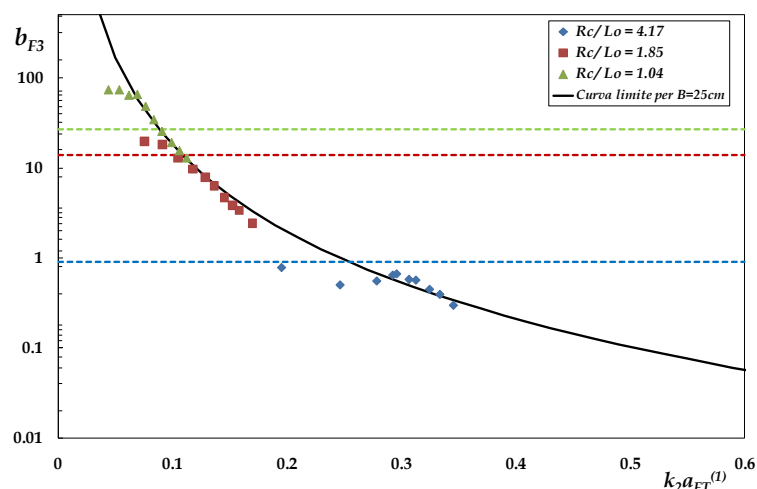


Figura 6.56. Fattore di proporzionalità  $b_{F3}$  in funzione di  $k_2 a_{FT}^{(1)}$ .

Tuttavia, nel corso di questo paragrafo il possibile processo di saturazione viene analizzato con riferimento alla componente  $2\omega$  che è risultata senz'altro quella di maggior potenza nei casi qui esaminati.

A conclusione di questo insieme di considerazioni di carattere generale è significativo segnalare la possibilità che l'attingimento delle condizioni di saturazione, tanto con riferimento alla componente  $2\omega$  tanto con riferimento a quella  $3\omega$ , possa essere correlato alla transizione "non-frangimento/frangimento". A questo proposito in Tabella 7.I vengono riportati per ogni struttura e per ogni periodo esaminato il rapporto tra i coefficienti  $b_{F2}$  e  $b_{F3}$  calcolati in corrispondenza della prima onda frangente ed i corrispondenti valori di saturazione. Questi ultimi sono stati stimati interpolando i dati sperimentali, struttura per struttura, mediante delle curve esponenziali o di potenza.

	$b_{F2} / [b_{F2 \text{ SATURAZIONE}}]$			$b_{F3} / [b_{F3 \text{ SATURAZIONE}}]$		
	T=1s	T=1.5s	T=2s	T=1s	T=1.5s	T=2s
Struttura 1 [h=31.5cm]	0.644	1.082	0.883	0.223	0.996	0.851
Struttura 2 [h=31.5cm]	0.687	0.882	0.959	0.438	1.314	1.126
Struttura 3 [h=31.5cm]	0.949	0.908	1.045	1.086	0.988	1.240
Struttura 4 [h=31.5cm]	0.771	0.976	1.009	0.820	0.838	1.155
Struttura 5 [h=31.5cm]	0.452	0.664				
Struttura 1 [h=27.6cm]	0.951			1.104		
Struttura 2 [h=27.6cm]	1.004			0.872		
Struttura 5 [h=27.6cm]	1.038					

Tabella 7.I. rapporto tra i valori  $b_{F2}$  e  $b_{F3}$  calcolati in corrispondenza della prima onda frangente ed i corrispondenti valori di saturazione.

Con l'eccezione di qualche caso isolato (evidenziato in rosso in tabella), i rapporti sono tutti prossimi all'unità indicando che il processo di frangimento sulle barriere sommerse potrebbe aver luogo proprio a seguito dell'attingimento dei valori di saturazione delle componenti libere non lineari. Tale risultato è in sostanziale accordo sia con le ipotesi di Goda e Morinobu (1998) sia con i risultati di Grue (1992).

Quanto ai tre valori “out-lier” riportati in rosso in tabella, le ragioni della loro anomalia risiedono con tutta probabilità nella cattiva stima dell’ampiezza  $a_{FT}^{(2)}$  per il caso della struttura 5 e nel valore irrilevante della  $a_{FT}^{(3)}$  per  $T=1s$  nel caso di Struttura 1 e 2. Gli altri valori più lontani dall’unità sono probabilmente il frutto di una cattiva stima visiva della transizione “non-frangimento/frangimento”.

### 7.3.1 La saturazione dell’armonica libera di pulsazione $2\omega$

Il fatto che con il procedere del frangimento l’ampiezza libera di pulsazione  $2\omega$  possa attingere un valore limite di saturazione non è un concetto nuovo. Nel più volte citato lavoro pubblicato sul *Journal of Fluid Mechanics* del 1992, Grue intitolò un piccolo paragrafo proprio a questo fenomeno, osservando che: “*at still higher incoming wave amplitude the transfer of energy to the superharmonic components reduces in power, and we find that superharmonic wave amplitudes become saturated.*”.

Il concetto della saturazione delle super-armoniche è stato poi oggetto di analisi in Calabrese et al. (2006) e Pasanisi et al. (2007).

In tutti i casi precedenti tuttavia le analisi sono state limitate a poche configurazioni strutturali e ciò non ha consentito di fatto né un approccio quantitativo a questo importantissimo aspetto della risposta idraulica delle barriere sommerse, né tantomeno una caratterizzazione completa del processo di trasmissione in un’ottica non lineare.

Proprio l’analisi quantitativa rappresenta lo scopo di questa sezione e l’elemento di novità di questo paragrafo.

#### L’ampiezza $a_{FT}^{(2)}$ prima della saturazione

Nella discussione della Figura 6.61a, si è detto che, per valori bassi dell’ampiezza trasmessa, ed in particolare prima che il frangimento abbia luogo, i dati sperimentali “davano la sensazione” di descrivere dei segmenti orizzontali sino ad attingere la curva di saturazione. La locuzione precedente è stata adoperata in quanto gli esperimenti qui proposti sono, a differenza di quelli sin qui pubblicati, quasi totalmente riferiti a situazioni nelle quali il moto ondoso frangeva sulla barriera.

Dunque, una possibile conferma alle nostre ipotesi di lavoro è stata ricercata nei dati pubblicati nei lavori di Grue (1992) su barriere rettangolari impermeabili e di Brossard e Chagdali (2001) su piastre orizzontali sommerse.

I risultati dei confronti sono stati di tipo confermativo; il comportamento riscontrato in questo insieme di dati di laboratorio è in effetti del tutto congruente con quello sin qui commentato. Come mostrato nelle Figure 7.15-7.17, quando gli esperimenti sono tali da presentare una evidente transizione tra “non-frangimento/frangimento”, i dati descrivono dapprima dei segmenti sub orizzontali per poi ridursi seguendo una curva di saturazione che, anche per questi test, sembra correlare i punti in maniera assai significativa (Figure 7.18 e 7.19).

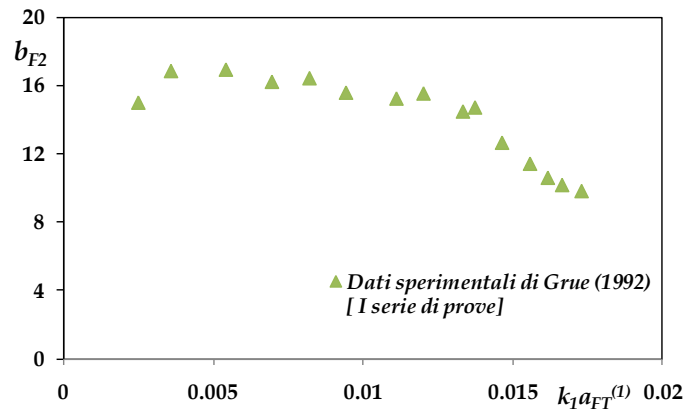


Figura 7.15. Andamento di  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$ ; Grue (1992).  
[Struttura rettangolare impermeabile,  $T=1.05s$ ,  $Rc=3.75m$ ]

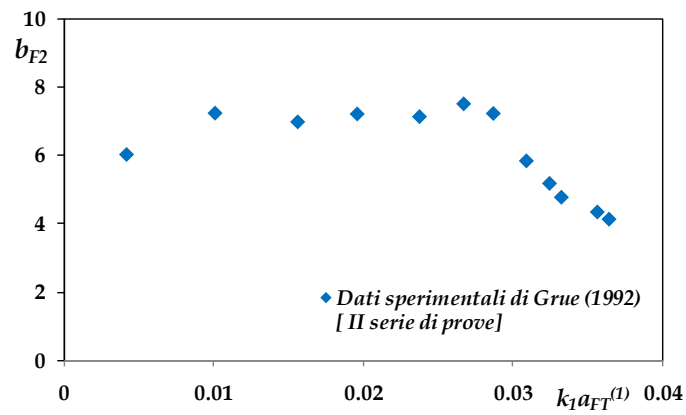


Figura 7.16. Andamento di  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$ ; Grue (1992).  
[Struttura rettangolare impermeabile,  $T=0.952s$ ,  $Rc=5cm$ ]

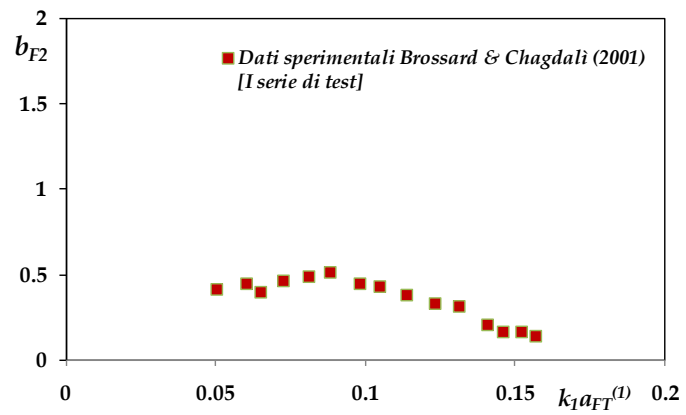


Figura 7.17. Andamento di  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$ ; Brossard e Chagdali (2001).  
[Piastra orizzontale sommersa,  $T=0.777s$ ,  $Rc/h=0.48$ ]

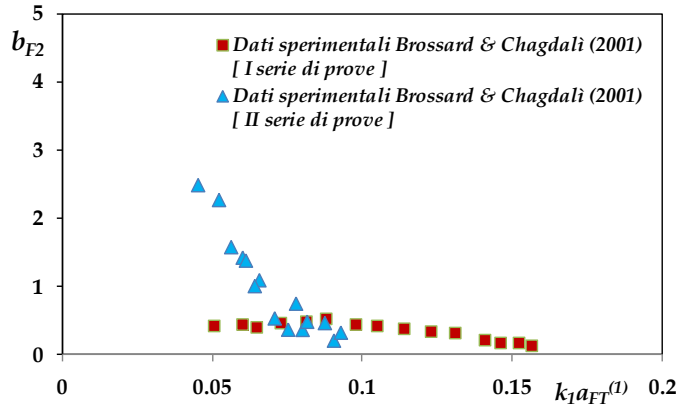


Figura 7.18. Andamento di  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$ ; Brossard e Chagdali (2001).  
[Piastra orizzontale sommersa,  $T=0.777s$ ,  $R_c/h=0.48$  (I serie),  $T=0.661$ ,  $R_c/h=0.24$  (serie II)]

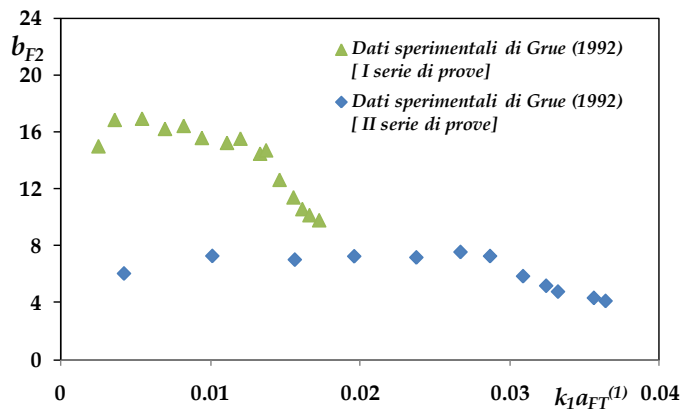


Figura 7.19. Andamento di  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1 a_{FT}^{(1)}$ ; Grue (1992).  
[Piastra orizzontale sommersa,  $T=1.05s$ ,  $R_c=3.75m$  (I serie),  $T=0.952s$ ,  $R_c=5cm$  (serie II)]

Nella Figura 7.18 è stata aggiunta una nuova serie di dati rispetto a quelli della Figura 7.17. Questi ultimi si riferiscono ad un differente insieme degli esperimenti di Brossard e Chagdali (2001), effettuati in condizioni in cui la transizione “non frangimento/frangimento” non era presente, essendo la sommergenza sulla piastra assai ridotta (in effetti i risultati sono analoghi a quelli presentati nel Capitolo 6 in relazione alle strutture con tirante  $R_c=2.6cm$ ).

Ora, come già osservato nel corso del Capitolo 6, un andamento di  $b_{F2}$  invariante rispetto a  $k_1 a_{FT}^{(1)}$ , e funzione invece unicamente del rapporto  $k_1 h$ , richiama il comportamento di un battente a pistone in campo non lineare. Si è anche detto che nel caso di onde lunghe la teoria di Madsen (per l’ondogeno) proponeva per  $b_{F2}$  la seguente semplice espressione:

$$b_{F2} = \frac{1}{2} \frac{ctgh(k_1 h)}{k_2 h} \cdot \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{\sinh(k_1 h)} - \frac{n_1}{2} \right] \cdot \frac{\tanh(k_2 h)}{n_2} \quad [7.25]$$

che può essere anche scritta in termini del rapporto  $a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}$ :

$$\frac{a_{FT}^{(2)}}{a_{FT}^{(1)}} = \frac{1}{2} a_{FT}^{(1)} \cdot \frac{\cotgh(k_1 h)}{h} \left[ \frac{3}{4 \sinh^2(k_1 h)} - \frac{n_1}{2} \right] \cdot \frac{\tanh(k_2 h)}{n_2} \quad [7.26]$$

Si è anche detto che i valori misurati dei coefficienti precedenti  $[b_{F2}, a_{FT}^{(2)}]$  sono (sempre nella zona di non saturazione) ben superiori rispetto a quelli previsti dalle equazioni [7.25] e [7.26]; si ricordi a questo punto che le due Equazioni precedenti sono del tutto equivalenti e frutto di una semplice manipolazione algebrica.

A questo punto è naturale supporre che possa esistere un fondale equivalente, diciamo  $h^*$ , in corrispondenza del quale la risposta della barriera sommersa possa considerarsi identica a quella di un battente a pistone in campo non lineare. Sostituendo dunque tale valore di  $h^*$ , e le corrispondenti componenti dispersive  $k_1^*$ , e  $k_2^*$ , nelle Equazioni [7.25] e [7.26] si dovrà ottenere il valore misurato dell'ampiezza adimensionale  $a_{FT}^{(2)}$ .

Il valore di  $h^*$ , è stato ricercato per tentativi, calcolando di volta in volta i numeri d'onda  $k_1^*$  e  $k_2^*$ , mediante la relazione di dispersione lineare. In tutti i casi è stato trovato un valore di tale profondità equivalente che restituiva un'approssimazione molto soddisfacente dei dati sperimentali; ciò sia con riferimento ai test specificamente condotti dal candidato sia con riferimento ai dati di Grue (1992) e di Brossard e Chagdali (2001). Le Figure seguenti mostrano alcuni casi di applicazione a supporto dell'affermazione precedente. Si noti che nei grafici, presentati nel piano  $[a_{FT}^{(2)}/a_{FT}^{(1)}, k_1^* a_{FT}^{(1)}]$ , l'Equazione [7.26] è rappresentata da rette a tratto continuo.

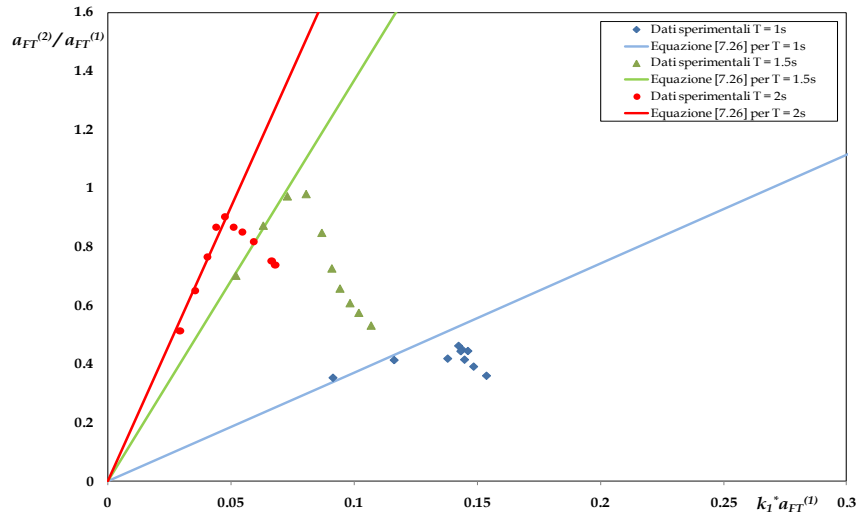


Figura 7.20. Adattamento dei dati sperimentali all'Equazione [7.26] per onde di periodo  $T=1s$ ,  $1.5s$  e  $2s$ ; [Struttura 1,  $B=80cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ].

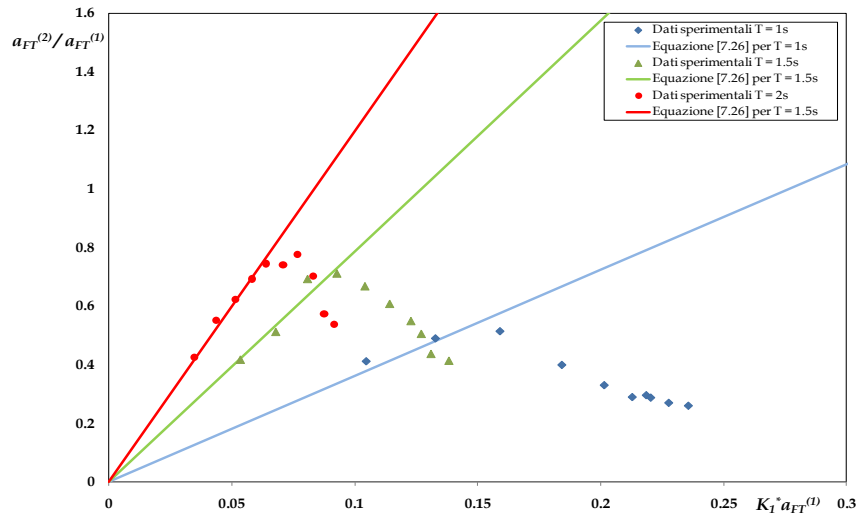


Figura 7.21. Adattamento dei dati sperimentali all'Equazione [7.26] per onde di periodo  $T=1s$ ,  $1.5s$  e  $2s$ ; [Struttura 2,  $B=25cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ].

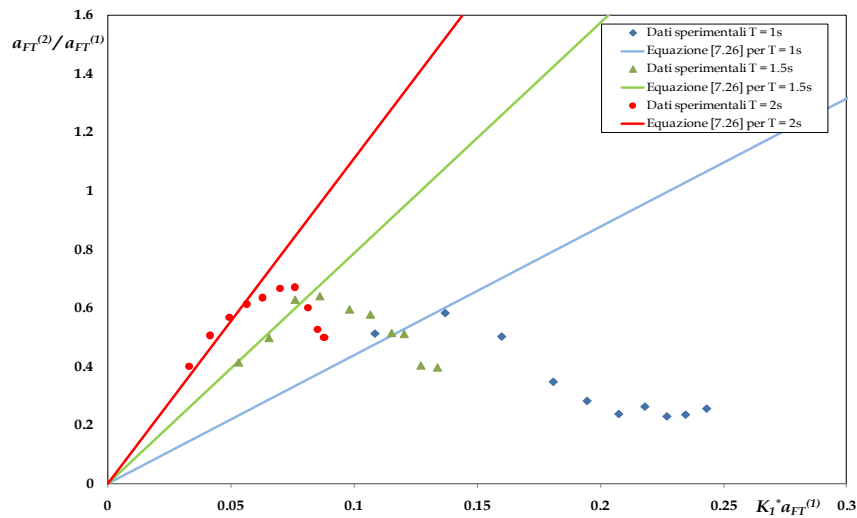


Figura 7.22. Adattamento dei dati sperimentali all'Equazione [7.26] per onde di periodo  $T=1s$ ,  $1.5s$  e  $2s$ ; [Struttura 3,  $B=25cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ].

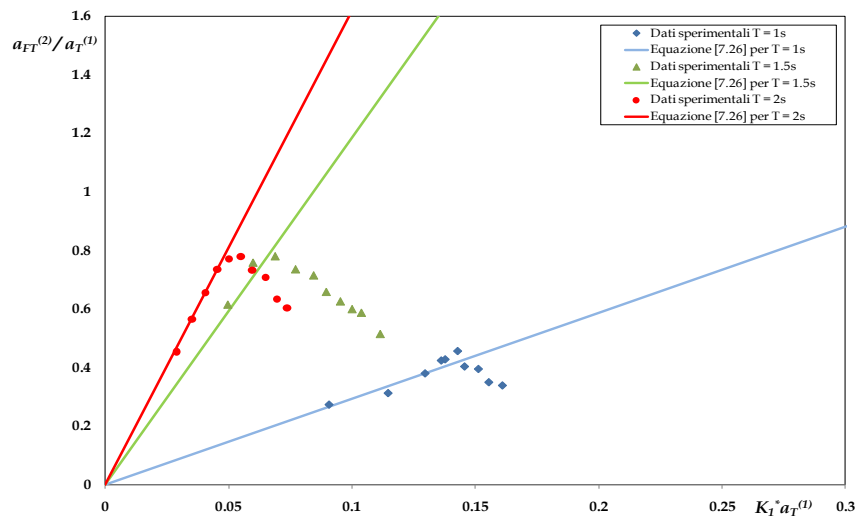


Figura 7.23. Adattamento dei dati sperimentali all'Equazione [7.26] per onde di periodo  $T=1s$ ,  $1.5s$  e  $2s$ ; [Struttura 4,  $B=80cm$ ,  $R_c=6.5cm$ ].

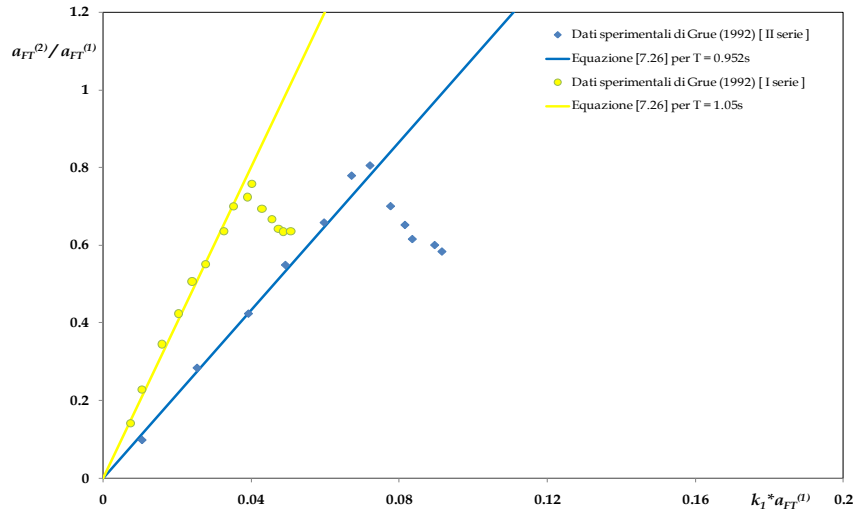


Figura 7.24. Adattamento dei dati sperimentali di Grue (1992) all'Equazione [7.26].

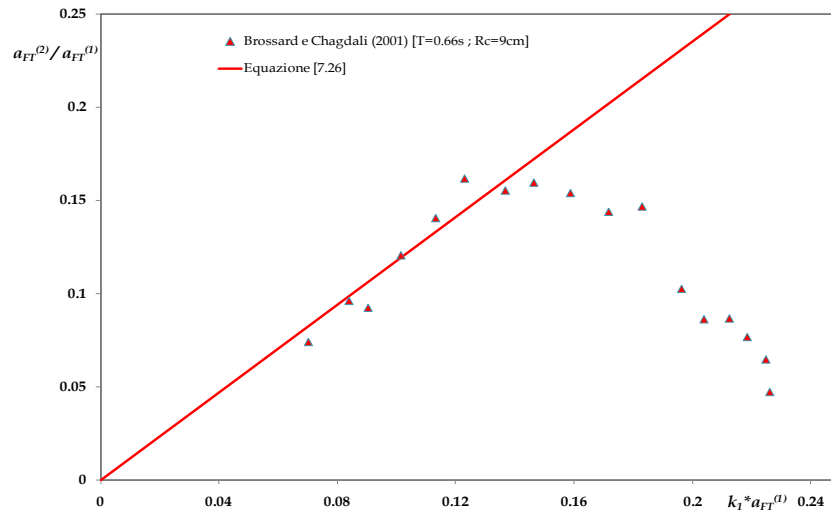


Figura 7.25. Adattamento dei dati sperimentali di Brossard e Chagdali (2001) all'Equazione [7.26].

Se da un lato il precedente risultato può apparire sorprendente bisogna tuttavia considerare che i due fenomeni in questione (generatore d'onda non lineare e trasmissione a tergo di una barriera sommersa) sono retti da equazioni differenziali piuttosto simili, come più volte richiamato nel corso di questo lavoro; è quindi in qualche modo naturale che possano sussistere delle condizioni di equivalenza nella risposta dei due sistemi.

È stato quindi condotto un lavoro di analisi volto a correlare i valori stimati di  $h^*$ , con i valori noti della profondità relativa reale nell'area protetta. È stata così trovata la seguente relazione:

$$k_1^* h^* = 0.288 \cdot \exp[0.747 \cdot (k_1 h_{eq})] \quad [7.27]$$

in cui  $h_{eq}$  rappresenta la sommergenza media sulla cresta dell'opera calcolata tenendo conto dell'effetto della porosità ( $n$ ). Si ha dunque:

$$h_{eq} = \overline{R_c} + (h - \overline{R_c}) \cdot n \quad [7.28]$$

in cui  $\overline{R_c}$  (sommersione media) è calcolato dal rapporto tra l'area della struttura  $A_s$  e la sua lunghezza totale  $L_s$  :

$$\overline{R_c} = \left[ h - \frac{A_s}{L_s} \right] \quad [7.29]$$

Per il caso di barriera impermeabile rettangolare studiato da Grue (1992) è stato ovviamente posto  $n = 0$ ; un po' più complesso è risultato invece il caso delle piastre studiate da Brossard e Chagdali (2001). Se da un lato questo tipo di struttura occupa una modestissima porzione del fondale a disposizione (e quindi  $n$  dovrebbe tendere ad 1) è pur vero che tutti gli studi condotti su piastre sommerse hanno mostrato che queste ultime sono in grado di riflettere una porzione significativa del moto ondoso incidente. D'altra parte anche Brossard e Chagdali (2001) misurarono, per questi test, coefficienti di riflessione non trascurabili e compresi tra 0.3 e 0.5. Poiché questi valori dei coefficienti di riflessione sono del tutto confrontabili con quelli delle barriere sommerse ordinarie, ed in realtà anche superiori a queste, è lecito supporre che si debba nell'Equazione [7.28] ipotizzare un coefficiente di porosità fittizio non troppo distante da quello adoperato per le barriere porose utilizzate nel corso degli esperimenti di laboratorio qui discussi. In particolare sono stati trovati dei valori di adattamento rispettivamente di 0.3 e 0.7 per i test eseguiti dagli Autori rispettivamente con una sommersione relativa  $R_c/h$  di 0.24 e 0.48.

Così facendo l'Equazione [7.27] è risultata possedere un indice di determinazione  $R^2$  di 0.90 come mostrato in Figura 7.26.

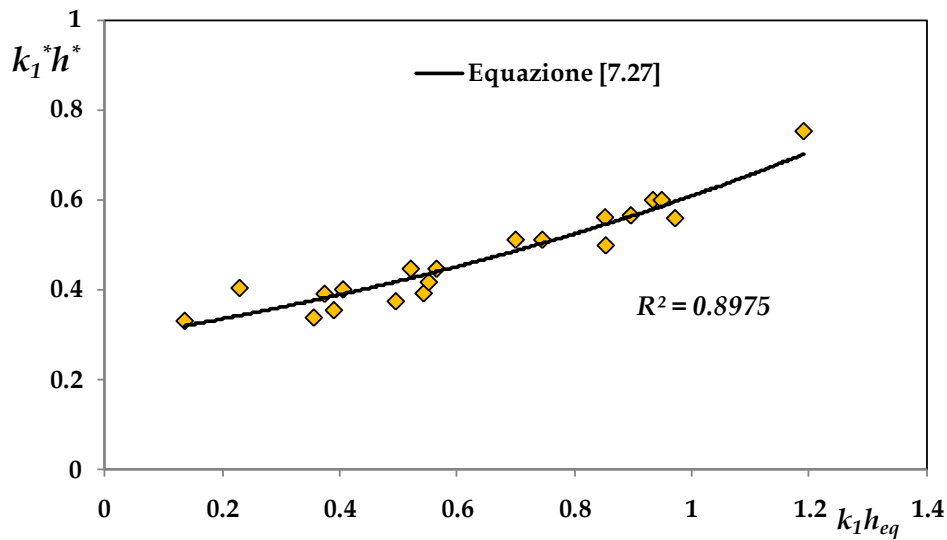


Figura 7.26. Valori di  $k_1 h^*$  ottenuti adattando i dati sperimentali alla [7.26]



### Determinazione della curva di saturazione della componente libera di pulsazione $2\omega$

Come si è detto in precedenza, l'incremento dell'ampiezza della componente non lineare si interrompe in prossimità della prima rottura dell'onda sulla cresta dell'opera per poi ridursi secondo una curva di saturazione.

Dall'analisi dei dati si è osservato che adoperando il fondale equivalente  $h^*$ , precedentemente introdotto, tutti i dati sperimentali relativi alla condizione di saturazione potevano essere soddisfacentemente interpretati nel piano  $[b_{F2}, k_1^* a_{FT}^{(1)}]$  dalla relazione:

$$b_{F2} = 0.0855 \cdot [k_1^* a_{FT}^{(1)}]^{-1.57} \quad [7.30]$$

con indice di determinazione  $R^2=86\%$  (Figura 7.27).

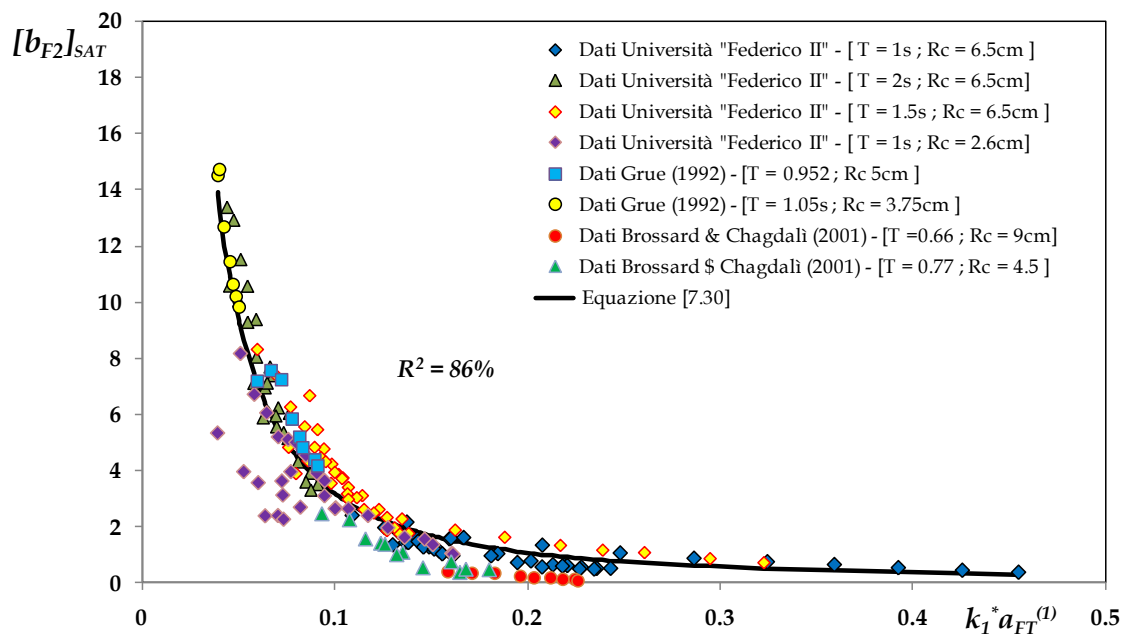


Figura 7.27. Valori di  $b_{F2}$  in funzione di  $k_1^* a_{FT}^{(1)}$  per tutti i dati sperimentali conseguiti nelle indagini discusse in questo lavoro con quelli relativi ai lavori di Grue (1992) e Brossard e Chagdali (2001).

Si noti che nel grafico esistono una serie di valori "out-lier" (circa 6-7 dati) che si riferiscono agli esperimenti condotti con onde di periodo  $T=1s$  in presenza della Struttura 5 con sommergezza  $R_c=2.6cm$ . Si ricorda che in questo caso la stima delle super-armoniche è stata eseguita con il metodo di Ling e Huang (2004) a quattro sonde; con tutta probabilità il cattivo adattamento di questi dati risiede proprio nella

metodologia di stima sicuramente più instabile di quella utilizzata per la maggioranza degli esperimenti condotti.

In definitiva è possibile determinare il coefficiente amplificativo della pulsazione libera  $2\omega$ ,  $b_{F2}$ , come:

$$\min \left\{ 0.0855 \cdot \left[ k_1^* a_{FT}^{(1)} \right]^{-1.57}, \quad \text{Equazione [7.25]} \right\} \quad [7.31]$$

#### Il processo di saturazione del lag di fase $\alpha_{F2}$

Riguardo il differenziale di fase  $\alpha_{F2}$ , la similitudine tra la risposta dell'ondogeno a pistone e quella delle barriere sommerse è stata impostata sin da subito nel corso del Capitolo 6; i risultati sperimentali sono stati forniti infatti in termini di una distanza  $X_p$  (vedi Equazione [6.47]), rispetto al piede in-shore della struttura in corrispondenza della quale dovesse essere idealmente localizzato un'ondogeno che, lavorando in acque basse sul fondale  $h^*$ , desse luogo ad ampiezze libere del II ordine inizialmente sfasate di  $-\pi$  rispetto alla componente fondamentale. Anche in quel caso è stata osservata una sorta di saturazione al crescere del segnale principale trasmesso; in particolare, al crescere del prodotto  $k_s a_{FT}^{(1)}$  (con  $k_s$  numero d'onda calcolato sul coronamento della barriera), i dati sperimentali sembravano descrivere dei segmenti approssimativamente orizzontali sino ad una curva limitante che, nelle Figure del tipo di quella 6.48, è stata proposta come un polinomio generico.

Poiché nel caso del battione in acque basse il lag di fase iniziale è assolutamente costante, è evidente che alle diverse ordinate dei segmenti orizzontali debbano corrispondere altrettante posizioni dell'ondogeno equivalente. I valori delle ordinate in questione, relativi alla cresta  $B$  ( $X_p/B$ ), sono risultati funzione soprattutto della profondità relativa; questo non è sorprendente se si pensa che nella teoria del battitore non lineare (Goda, 1998) il lag di fase  $\alpha_{F2}$  è giusto funzione della profondità relativa. In realtà è stata constatata anche una piccola ulteriore dipendenza dalla larghezza di cresta  $B$ , probabilmente conseguenza di una non perfetta adimensionalizzazione dell'ascissa principale  $X_p$ .

In definitiva si è ottenuto:

$$X_p/B = 0.0092 \cdot \left[ \frac{B^{0.5} \cdot L_0^{2.5}}{h^2} \right] + 3.22 \quad [7.32]$$

Si ricordi che  $h$  è il fondale reale e non  $h^*$ .

D'altra parte all'amplificarsi del segnale principale anche il differenziale di fase tende a subire una saturazione con un progressivo spostarsi in avanti della posizione del battitore che può attingere, in taluni casi, anche un'ascissa positiva rispetto al piede interno dell'opera, situazione concettualmente poco realistica.

Analizzando i dati a disposizione è stata adattata la seguente relazione:

In definitiva la traslazione relativa  $X_p/B$  è uguale:

$$X_p/B = [1.61x^2 + 0.702x + 0.075] \cdot 10^3 \quad [7.33]$$

con  $x = k_s a_{FT}^{(1)}$ .

La Figura 7.28 mostra l'interpolazione dei dati sperimentali mediante la [7.33].

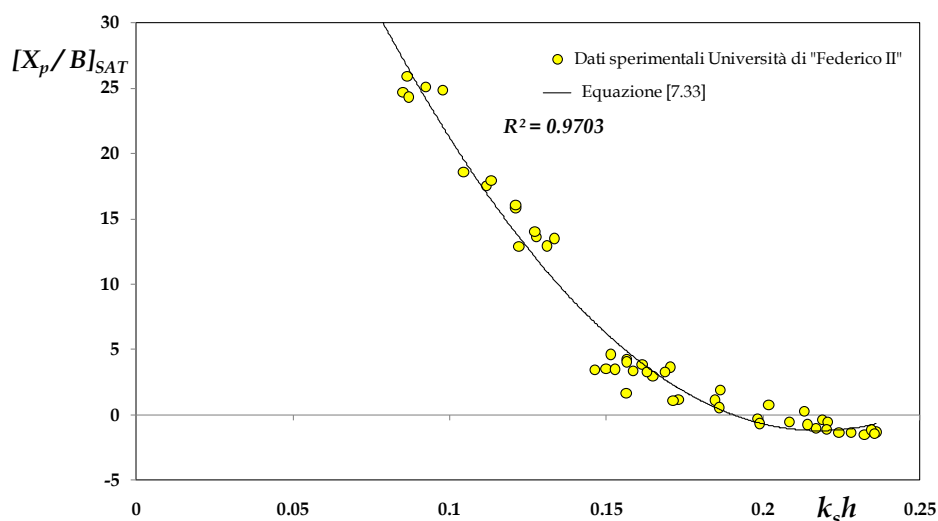


Figura 7.28. Interpolazione dei valori sperimentali di  $X_p/B$  in funzione di  $k_s a_{FT}^{(1)}$ .

Il confronto con i dati sperimentali è mostrato in Figura 7.29 e restituisce un valore di  $R^2$  intorno al 95%; la distribuzione dei residui sembra un po' strutturata ad "s" e ciò necessita di un ulteriore approfondimento. Inoltre l'espressione polinomiale della curva di saturazione suggerisce estrema cautela in fase di estrapolazione rispetto ai dati sperimentali qui discussi.

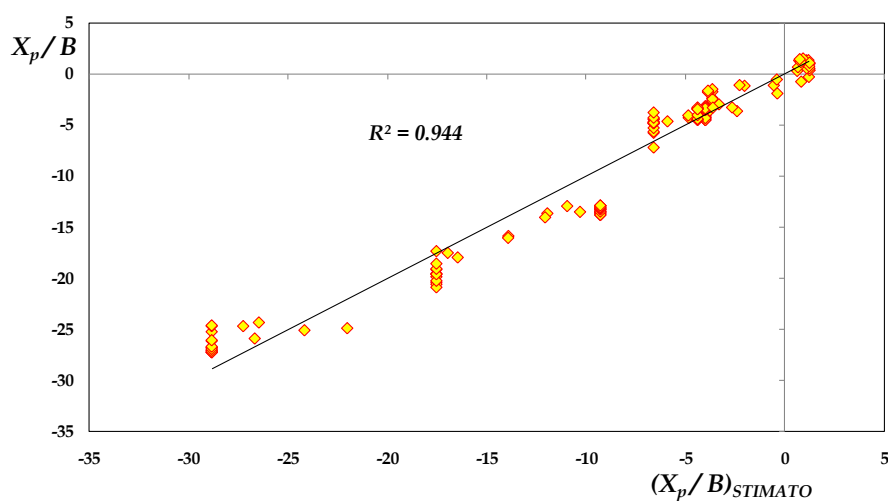


Figura 7.29. Confronto tra i valori  $X_p/B$  stimati mediante la [7.33] ed i valori sperimentali.

In definitiva è possibile determinare il *lag* di fase  $X_p/B$  tra la componente libera di pulsazione  $2\omega$ , e la componente fondamentale  $b_{F2}$ , come:

$$\max\{\text{Equazione [7.32]}, \quad \text{Equazione [7.33]}\} \quad [7.34]$$

## Conclusioni

Gli studi realizzati per questo lavoro di tesi hanno permesso di indagare alcuni aspetti caratteristici dell' interazione tra moto ondoso regolare e barriere sommerse. In particolare è stato approfondito mediante un approccio non lineare il fenomeno di trasmissione descrivendo le profonde trasformazioni che la presenza delle barriere impone al campo d'onda trasmesso.

Il fenomeno è stato analizzato per via sperimentale attraverso l'impiego di modelli fisici di scogliere sommerse in massi naturali variandone i principali parametri progettuali, quali larghezza della berma, livello di sommersenza, pendenza del paramento e porosità. I risultati delle analisi di laboratorio hanno chiaramente evidenziato come il passaggio dell'onda sulla cresta di tali strutture sia accompagnata dalla generazione di super-armoniche di differente natura ("onde legate", "onde libere" ed "onde di interferenza") la cui interazione produce una variazione spaziale delle caratteristiche del moto ondoso sia nel dominio del tempo che in quello delle frequenze.

Attraverso registrazioni multiple del processo di elevazione della superficie libera nell'area protetta sono state rilevate fluttuazioni spaziali delle forme del profilo d'onda e quelle dei coefficienti di asimmetria del profilo stesso. Questa circostanza presenta un notevole interesse dal punto di vista applicativo in quanto i coefficienti di asimmetria sono direttamente correlati con le direzioni delle velocità del fluido e, dunque, con le direzioni preferenziali del trasporto solido "cross-shore". Da qui nasce la possibilità che la non permanenza del profilo ondoso nell'area protetta possa contribuire a rendere ancor più incerta la risposta morfologica di un litorale protetto da strutture sommerse.

È stato altresì evidenziato che l' interazione non lineare onda-struttura determina una oscillazione delle componenti spettrali nella zona protetta e che tali oscillazioni inducono "globalmente" una variazione spaziale del coefficiente di trasmissione  $K_T$  rendendo dunque in qualche modo ambigua la sua stessa definizione.

Variando le caratteristiche ondose e le configurazioni geometriche delle barriere è stato possibile descrivere il fenomeno in maniera sufficientemente completa evidenziando il legame tra aspetti macroscopici del processo di trasmissione e generazione delle super-armoniche.

Alla luce dei risultati ottenuti si conclude che i fenomeni non lineari studiati, sebbene articolati, avvengono comunque in maniera pressoché "ordinata" e che gli effetti da essi generati possono essere previsti ed esaminati da un punto di vista teorico.

Per onde non frangenti è stata riscontrata un'equivalenza tra la risposta non lineare di una barriera sommersa e quella di un generatore d'onda a pistone; tale equivalenza consente di prevedere con ragionevole accuratezza l'ampiezza dei disturbi secondari.

Il verificarsi del frangimento produce un effetto di riduzione sulla generazione di super-armoniche; si è visto che le condizioni di prima rottura dell'onda coincidano con l'attingimento di un valore di saturazione oltre il quale le super-armoniche libere non possono più crescere tanto che, quando i fenomeni dissipativi divengono importanti, il

processo di trasmissione tende ad una parziale “linearizzazione”. Con riferimento alle seconde super-armoniche nel presente lavoro è stata proposta una curva di regressione per le condizioni di saturazione che mostra un buon grado di accuratezza.

In definitiva, l’approccio seguito in questo lavoro consente di portare in conto gli aspetti non lineari nella ricostruzione del moto ondoso trasmesso dietro la struttura; conoscendo le singole armoniche e super-armoniche che costituiscono il segnale d’onda trasmesso si può dunque tenere conto della reale altezza cresta-cavo dell’onda e della variazione dei coefficienti di asimmetria, parametri senz’altro determinanti nei processi dinamici costieri.

I risultati ottenuti ed i ragionamenti maturati dal questo lavoro mostrano un generale accordo con la maggior parte degli studi presenti in letteratura mettendo in evidenza, in alcuni casi, aspetti prima ad ora non sufficientemente approfonditi. Rimangono ad ogni modo molti spunti per future indagini di ricerca.

In primo luogo si evidenzia che l’approccio qui proposto prescinde dalla stima dell’indice di trasmissione della componente d’onda fondamentale, sicché materia di futura indagine potrebbe essere costituita da un tentativo di ricalibrazione ed adattamento di alcune formule empiriche per la previsione di tale indice.

Si sottolinea, infine, che le indagini svolte in questo lavoro sono limitate ai casi di onde regolari; sarebbe certamente interessante sviluppare nuovi studi ed applicare l’approccio qui seguito agli stati di mare reali verificando se le interazioni non lineari influenzino i parametri statistici spettrali e le distribuzioni statistiche del profilo ondoso trasmesso.

## **Appendice I. Tecniche di laboratorio per il calcolo delle diverse componenti armoniche**

In questo lavoro la stima delle diverse componenti armoniche del moto ondoso è stata eseguita principalmente mediante una tecnica ai minimi quadrati; i dati sperimentali sono stati adattati ad equazioni teoriche dopo aver effettuato molteplici misurazioni del profilo ondoso nella direzione di propagazione.

In effetti, numerosi metodi proposti in letteratura tentano di stimare le ampiezze incognite a partire da un numero ridotto di acquisizioni simultanee e non differiscono nella sostanza da un adattamento manuale diretto. Gli studi proposti hanno riguardato principalmente gli effetti della riflessione al primo ordine, in quanto quest’ultima diviene senz’altro dominante  $[K_R = o(k_1 a) \Rightarrow a^R = (\alpha)]$  in presenza di strutture. Tra le pubblicazioni più citate ricorderemo Goda e Suzuki (1971) e Mansard e Funke (1980).

Di seguito viene proposta un'analisi critica delle metodologie di separazione non lineare proposte dalle riviste specializzate. Dapprima esamineremo la tecnica di Grue (1992) che adopera 2 acquisizioni simultanee dell'elevazione d'onda, quindi discuteremo l'approccio di Lin e Huang (2004) che richiede un numero minimo di 4 acquisizioni.

### A.1 Tecnica di separazione non lineare a due sonde. Metodo di Grue (1992)

In via preliminare possiamo senz'altro affermare che il numero minimo di acquisizioni simultanee necessario a risolvere un problema assegnato è pari, ovviamente, al numero di incognite a disposizione.

Nel suo lavoro pubblicato sul *Journal of Fluid Mechanics* nel 1992, Grue muove dall'ipotesi che la superficie libera abbia equazione:

$$\eta(x, t) = a^{(1)} \cos(\omega t - k_1 x) + a_R^{(1)} \cos(\omega t + k_1 x + \varepsilon) + a_B^{(2)} \cos[2(\omega t - k_1 x)] + a_F^{(2)} \cos(2\omega t - k_2 x - \alpha_{F2}) \quad [A.1]$$

Chiaramente l'equazione [A.1] è valida se:

1. sono trascurabili gli effetti del terzo ordine, in particolare quelli sulla frequenza fondamentale dovuti ad onde d'interferenza e alla correzione di Stokes;
2. nell'ipotesi già introdotta in precedenza che:

$$K_R = o(k_1 a) \Rightarrow a_R^{(1)} = K_R a = o(k_1 a)^2 \quad [A.2]$$

3. il coefficiente di riflessione dell'onda secondaria libera sia inferiore a  $K_R$ ;
4. l'ampiezza libera incidente  $a_F^{(2)} = o(k_1 a)^2$  in maniera tale che, stante la condizione precedente, la corrispondente ampiezza riflessa sia di ordine almeno di  $(k_1 a)^3$ .

Ne consegue che le ipotesi 1-4 condizionano la validità della tecnica di separazione.

Dalla equazione [A.1] è comunque evidente che le incognite da ricavare sono 2 per ogni componente di frequenza. In particolare, trascurando in questa sede le costanti di fase per ragioni di chiarezza, le grandezze da ricavare sono:

$$\begin{cases} a^{(1)} \text{ ed } a_R^{(1)} \text{ (o equiv. } K_R) & \text{per } \omega \\ a_B^{(2)} \text{ ed } a_F^{(2)} & \text{per } 2\omega \end{cases} \quad [A.3]$$

Manipoliamo adesso l'equazione [A.1], introducendo le note formule di Eulero secondo le quali:

$$\cos\beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \quad [A.4]$$

Si avrà così:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{a^{(1)}}{2} [e^{i(\omega t - k_1 x)} + e^{-i(\omega t - k_1 x)}] + \frac{a_R^{(1)}}{2} [e^{i(\omega t + k_1 x + \varepsilon)} + e^{-i(\omega t + k_1 x + \varepsilon)}] \\ &\quad + \frac{a_B^{(2)}}{2} [e^{i(2\omega t - 2k_1 x)} + e^{-i(2\omega t - 2k_1 x)}] \\ &\quad + \frac{a_F^{(2)}}{2} [e^{i(2\omega t - k_2 x - \alpha_{F2})} + e^{-i(2\omega t - k_2 x - \alpha_{F2})}] = \\ &= e^{i(\omega t)} \left[ \frac{a}{2} e^{-ik_1 x} + \frac{a_R^{(1)}}{2} e^{i(k_1 x + \varepsilon)} \right] + e^{i(2\omega t)} \left[ \frac{a_B^{(2)}}{2} e^{-2k_1 x} + \frac{a_F^{(2)}}{2} e^{i(-k_2 x - \alpha_{F2})} \right] \\ &\quad + e^{-i(\omega t)} \left[ \frac{a^{(1)}}{2} e^{-ik_1 x} + \frac{a_R^{(1)}}{2} e^{i(k_1 x + \varepsilon)} \right] \\ &\quad + e^{-i(2\omega t)} \left[ \frac{a_B^{(2)}}{2} e^{-2k_1 x} + \frac{a_F^{(2)}}{2} e^{i(-k_2 x - \alpha_{F2})} \right] \\ &= \sum_{n=-2}^2 F_n e^{in\omega t} \quad [A.5] \end{aligned}$$

I coefficienti  $A_n$  della sommatoria [A.5] sono proprio quelli della serie di Fourier della funzione [A.1], che peraltro è stata troncata al secondo termine semplicemente per coerenza di esposizione. Indicando dunque con  $F_n$  la componente ennesima della serie di Fourier:

$$F_n(x) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} \eta(x, t) e^{-in\omega t} dt \quad [A.6]$$

si avrà per confronto:

$$F_1(x) = \left[ \frac{a^{(1)}}{2} e^{-ik_1 x} + \frac{a_R^{(1)}}{2} e^{i(k_1 x + \varepsilon)} \right] \quad [A.7]$$

$$F_2(x) = \left[ \frac{a_B^{(2)}}{2} e^{-2k_1 x} + \frac{a_F^{(2)}}{2} e^{-i(k_2 x + \alpha_{F2})} \right] \quad [A.8]$$

Ed analogamente per  $F_{-1}(x)$  e  $F_{-2}(x)$ .



Misurando adesso le fluttuazioni della superficie libera ad una distanza  $\Delta x$  lungo il verso di propagazione oncosa si ha:

$$F_1(x + \Delta x) = \left[ \frac{a^{(1)}}{2} e^{-ik_1 x} e^{-ik_1 \Delta x} + \frac{a_R^{(1)}}{2} e^{i(k_1 x + \varepsilon)} e^{ik_1 \Delta x} \right] \quad [A. 9]$$

$$F_2(x + \Delta x) = \left[ \frac{a_B^{(2)}}{2} e^{-2ik_1 x} e^{-2ik_1 \Delta x} + \frac{a_F^{(2)}}{2} e^{-i(k_2 x + \alpha_{F2})} e^{-ik_2 \Delta x} \right] \quad [A. 10]$$

Moltiplicando la [A.9] per  $e^{-ik_1 \Delta x}$ , si ottiene per differenza con la [A.7]:

$$F_1(x) - F_1(x + \Delta x)e^{-ik_1 \Delta x} = \frac{a^{(1)}}{2} e^{-ik_1 x} (1 - e^{-i2k_1 \Delta x}) \quad [A. 11]$$

Il modulo delle quantità presenti nella [A.11] è pari a:

$$|F_1(x) - F_1(x + \Delta x)e^{-ik_1 \Delta x}| = \frac{a^{(1)}}{2} |1 - e^{-i2k_1 \Delta x}| \quad [A. 12]$$

Sviluppando il secondo termine al secondo membro della [4.12] si ottiene:

$$\begin{aligned} |1 - e^{-i2k_1 \Delta x}| &= |1 - \cos(2k_1 \Delta x) + i \sin(2k_1 \Delta x)| \\ &= |2\sin^2(k_1 \Delta x) + i 2\sin(k_1 \Delta x)\cos(k_1 \Delta x)| \\ &= 2\sqrt{\sin^4(k_1 \Delta x) + \sin^2(k_1 \Delta x)\cos^2(k_1 \Delta x)} \\ &= 2\sqrt{\sin^2(k_1 \Delta x)[\sin^2(k_1 \Delta x) + \cos^2(k_1 \Delta x)]} \\ &= 2|\sin(k_1 \Delta x)| \end{aligned} \quad [A. 13]$$

Quindi sostituendo tale risultato nella [A.12]:

$$|F_1(x) - F_1(x + \Delta x)e^{-ik_1 \Delta x}| = a^{(1)} |\sin(k_1 \Delta x)| \quad [A. 14]$$

da cui:

$$a^{(1)} = \frac{|F_1(x) - F_1(x + \Delta x)e^{-ik_1 \Delta x}|}{|\sin(k_1 \Delta x)|} \quad [A. 15]$$

che diverge per:

$$k_1 \Delta x = m\pi \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{L} \Delta x = m\pi \Rightarrow \Delta x = m \frac{L}{2} \quad \text{con } m = 1, 2, \dots \quad [A. 16]$$

Analogamente per ricavare  $a_R^{(1)}$ , si moltiplica la [A.9] per  $e^{ik_1\Delta x}$  e si ottiene, per differenza con la [A.7]:

$$F_1(x) - F_1(x + \Delta x)e^{ik_1\Delta x} = \frac{a_R^{(1)}}{2}e^{ik_1x}(1 - e^{i2k_1\Delta x}) \quad [A. 17]$$

Analogamente al caso precedente si ha:

$$|F_1(x) - F_1(x + \Delta x)e^{ik_1\Delta x}| = \frac{a_R^{(1)}}{2}|1 - e^{i2k_1\Delta x}| \quad [A. 18]$$

E quindi:

$$a_R^{(1)} = \frac{|F_1(x) - F_1(x + \Delta x)e^{ik_1\Delta x}|}{|\text{sen}(k_1\Delta x)|} \quad [A. 19]$$

che diverge allo stesso modo della [A.16].

Passando al secondo ordine, moltiplicando la [A.10] per  $e^{ik_2\Delta x}$ , si ottiene per differenza con la [A.8]:

$$F_2(x) - F_2(x + \Delta x)e^{ik_2\Delta x} = \frac{a_B^{(2)}}{2}e^{-2ik_1x}[1 - e^{i(k_2-2k_1)\Delta x}] \quad [A. 20]$$

E quindi:

$$|F_2(x) - F_2(x + \Delta x)e^{ik_2\Delta x}| = \frac{a_B^{(2)}}{2}|1 - e^{i(k_2-2k_1)\Delta x}| \quad [A. 21]$$

da cui:

$$a_B^{(2)} = \frac{|F_2(x) - F_2(x + \Delta x)e^{ik_2\Delta x}|}{\left|\text{sen}\left[\frac{1}{2}(k_2 - 2k_1)\Delta x\right]\right|} \quad [A. 22]$$

che diverge per:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k_2 - 2k_1}{2}\right)\Delta x = m\pi \Rightarrow \\ \Delta x = m \frac{\pi}{\left(\frac{k_2}{2} - k_1\right)} = m\lambda \quad \text{con } m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad [A. 23]$$

Analogamente per ricavare  $a_{F2}$ , si moltiplica la [A.10] per  $e^{i2k_1\Delta x}$  e si ottiene per differenza con la [A.8]:

$$F_2(x) - F_2(x + \Delta x)e^{i2k_1\Delta x} = \frac{a_F^{(2)}}{2}e^{-2ik_1x}[1 - e^{i(k_2-2k_1)\Delta x}] \quad [A. 24]$$

Ed infine:

$$a_F^{(2)} = \frac{|F_2(x) - F_2(x + \Delta x)e^{i2k_1\Delta x}|}{\left| \sin \left[ \frac{1}{2}(k_2 - 2k_1)\Delta x \right] \right|} \quad [A.25]$$

che diverge allo stesso modo della [A.23].

## A.2 Tecnica di separazione non lineare a quattro sonde. Metodo di Lin e Huang (2004)

Nel proprio lavoro, recentemente pubblicato sul *Coastal Engineering Journal*, gli Autori propongono, per descrivere la superficie libera, la seguente espressione generale:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & a^{(1)} \cos(\omega t - k_1 x) + a_R^{(1)} \cos(\omega t + k_1 x + \varepsilon) + \sum_{n \geq 2} a_B^{(n)} \cos[n(\omega t - k_n x)] \\ & + \sum_{n \geq 2} a_{Rn\omega}^{(n)} \cos[n(\omega t + k_n x) + \varepsilon_n] + \sum_{n \geq 2} a_F^{(n)} \cos[n(\omega t - k_n x) + \alpha_{Fn}] \\ & + \sum_{n \geq 2} a_{FRn\omega}^{(n)} \cos[(n\omega t + k_n x) + \alpha_{Fn}] + e_m(t) \end{aligned} \quad [A.26]$$

dove  $a_B^{(n)}$  ed  $a_F^{(n)}$  sono rispettivamente le componenti libere e legate di ordine  $n$ ,  $a_{Rn\omega}^{(n)}$  è la componente riflessa dell'onda legata di ordine  $n$  di pulsazione  $n\omega$  e  $\varepsilon_n$  e la sua costante di fase iniziale,  $a_{FRn\omega}^{(n)}$  è la componente riflessa dell'onda libera di ordine  $n$  e  $\alpha_{Fn}$  è il suo *lag* di fase con l'onda fondamentale.

È importante sottolineare che gli Autori descrivono il metodo per la scomposizione delle ampiezze per un profilo ondosso così come espresso nella [A.26], ossia per un qualsivoglia ordine di approssimazione considerando la contemporanea presenza di onde libere e legate sia incidenti che riflesse.

In questo paragrafo si considererà il profilo composto da componenti di pulsazione non superiore a  $2\omega$ , come sarà più chiaro in seguito il procedimento è identico ed iterativo per ogni  $n \geq 2$ .

Al II ordine di approssimazione si avrà:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = & a^{(1)} \cos(\omega t - k_1 x) + a_R^{(1)} \cos(\omega t + k_1 x + \varepsilon) + a_B^{(2)} \cos[2(\omega t - k_1 x)] \\ & + a_F^{(2)} \cos(2\omega t - k_2 x - \alpha_{F2}) + o(k_1 a)^3 \end{aligned} \quad [A.27]$$

Dal confronto tra le equazioni precedenti si può facilmente ricavare che fra l'espressione teorica del profilo libero e quella realmente misurata, esiste uno scarto,  $e(t)$ , che può essere dovuto tanto al rumore elettrico associato all'acquisizione mediante sonde di livello, tanto a componenti armoniche di ordine superiore non considerate nella teoria.

In ogni caso, come dettagliatamente discusso nel seguito, le grandezze incognite verranno ricavate mediante scomposizione della funzione del profilo libero in serie di Fourier, analogamente a quanto visto in proposito del metodo di Grue, ed applicando un criterio di minimizzazione della funzione d'errore.

#### Determinazione delle componenti di pulsazione $\omega$

Come detto in precedenza, la decomposizione dell'onda avviene applicando la trasformata di Fourier alla superficie libera misurata. Si ottiene:

$$F_1(x + \Delta x) = C_{(1)}^I X_{(1)}^I + C_{(1)}^R X_{(1)}^R + \Omega_m^{(1)} \quad [\text{A. 28}]$$

Dove:

$$\begin{cases} X_{(1)}^I = a^{(1)} \exp[-i(k_1 x)] \\ X_{(1)}^R = a_R^{(1)} \exp[+i(k_1 x + \varepsilon)] \end{cases} \quad [\text{A. 29}]$$

$$\begin{cases} C_{(1)}^I = \frac{\exp(-ik_1 \Delta x_m)}{2} \\ C_{(1)}^R = \frac{\exp(ik_1 \Delta x_m)}{2} \end{cases} \quad [\text{A. 30}]$$

In cui  $\Delta x_m$  è la distanza tra il generico punto di acquisizione e la prima stazione di misura, che immagineremo corrisponda all'ascissa  $x$ . Chiaramente  $F_1$  rappresenta la componente di Fourier associata alla prima armonica.

Le [A.29] e [A.30] coincidono con le [A.7] e [A.9]; per verificarlo è sufficiente porre attenzione al fatto che la trasformata di Fourier  $F_1(x)$  si ottiene ponendo, ovviamente,  $\Delta x_m = 0$ ; quindi si ha:

$$C_{(1)}^I = C_{(1)}^R = \frac{1}{2} \quad [\text{A. 31}]$$

La differenza tra le due impostazioni risiede nel termine  $\Omega_m^{(1)}$ , che rappresenta la trasformata di Fourier di  $e_m(t)$ . I parametri incogniti  $X_{(1)}^I$  e  $X_{(1)}^R$  saranno ricavati imponendo che la sommatoria del quadrato degli errori, effettuata lungo *m posizioni di misura*, Figura A.1, sia minima:

$$\sum_m [\Omega_m^{(1)}]^2 = \sum [F_1(x_m) - C_{(1)}^I X_{(1)}^I - C_{(1)}^R X_{(1)}^R]^2 = \min \quad [\text{A. 32}]$$

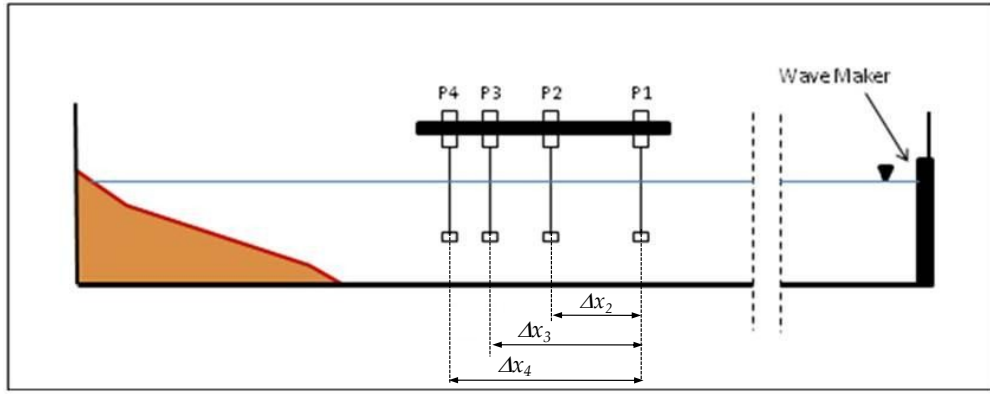


Figura A.1. Schematizzazione della disposizione spaziale delle sonde.

Le equazioni da risolvere saranno quindi determinate imponendo analiticamente che l'errore totale sia minimo rispetto alle incognite  $X_{(1)}^I$  e  $X_{(1)}^R$ . In formule avremo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X_{(1)}^I} \sum_m [\Omega_m^{(1)}]^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_{(1)}^R} \sum_m [\Omega_m^{(1)}]^2 = 0 \end{cases} \quad [A.33]$$

Risolvendo il sistema [A.33] si ottiene un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite  $X_{(1)}^I$  e  $X_{(1)}^R$ ; in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{(1)}^I \\ X_{(1)}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad [A.34]$$

Gli elementi  $A_{ij}$  della matrice dei coefficienti dipendono dal numero d'onda  $k_1$  e dalla posizione delle sonde. Essi sono espressi in funzione di  $C_{(1)}^I$  e  $C_{(1)}^R$  mediante le seguenti relazioni:

$$A_{11} = \sum_m [C_{(1)}^I]^2; A_{12} = A_{21} = \sum_m [C_{(1)}^I C_{(1)}^R]; A_{22} = \sum_m [C_{(1)}^R]^2 \quad [A.35]$$

Gli elementi  $B_i$  della colonna dei termini noti, dipendono sia dai coefficienti  $C_{(1)}^I$  e  $C_{(1)}^R$  che dalle ampiezze di Fourier  $F_1$ , calcolate a partire dalle fluttuazioni temporali della superficie libera in corrispondenza delle  $m$  posizioni all'interno del canale:

$$B_1 = \sum_m [F_1(x + \Delta x) C_{(1)}^I]; B_2 = \sum_m [F_1(x + \Delta x) C_{(1)}^R] \quad [A.36]$$

Dalla risoluzione del sistema [A.36] è possibile determinare le ampiezze dell'armonica incidente e riflessa  $a^{(1)}$  e  $a_R^{(1)}$ , essendo esse i moduli delle incognite complesse  $X_{(1)}^I$  e  $X_{(1)}^R$ , ovvero:

$$a^{(1)} = |X_{(1)}^I|; \quad a_R^{(1)} = |X_{(1)}^R| \quad [A.37]$$

È importante notare che affinché il sistema possa avere una ed una sola soluzione, il determinante della matrice dei coefficienti deve essere diverso da zero. Tale condizione risulta, infatti, vincolante all'applicabilità del metodo. Il verificarsi di tale condizione si ha quando:

$$\sum_m [C_{(1)}^I]^2 \cdot \sum_m [C_{(1)}^R]^2 - \left\{ \sum_m [C_{(1)}^I C_{(1)}^R] \right\}^2 = 0 \quad [A.38]$$

La [A.38] ci dice in che relazione il numero d'onda e la distanza relativa delle sonde all'interno del canale devono trovarsi affinché il sistema risulti indeterminato.

Per ottenere una formula esplicita della [A.38] bisogna specificare il numero di sonde utilizzate e la loro posizione relativa.

Nel caso di due sonde ( $m=2$ ) si ha:

$$\left[ \frac{1}{4} + \frac{\exp(-2ik_1\Delta x_2)}{4} \right] \cdot \left[ \frac{1}{4} + \frac{\exp(2ik_1\Delta x_2)}{4} \right] - \frac{1}{4} = 0 \quad [A.39]$$

L'equazione [A.39] è verificata quando:

$$\sin^2(k_1\Delta x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 |\sin(k_1\Delta x_2)| = 0 \quad [A.40]$$

ovvero:

$$\Delta x_2 = n \frac{L}{2} \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad [A.41]$$

In pratica con due punti di misura, la soluzione coincide con quella proposta da Grue e discussa nel paragrafo precedente.

Nel caso di tre sonde ( $m=3$ ) si ha:

$$\left[ \frac{1}{4} + \frac{\exp(-2ik_1\Delta x_2)}{4} + \frac{\exp(-2ik_1\Delta x_3)}{4} \right] \cdot \left[ \frac{1}{4} + \frac{\exp(2ik_1\Delta x_2)}{4} + \frac{\exp(2ik_1\Delta x_3)}{4} \right] - \frac{9}{16} = 0 \quad [A.42]$$

L'equazione [A.42] è verificata quando:

$$\sin^2(k_1\Delta x_2) + \sin^2(k_1\Delta x_3) + \sin^2[k_1(\Delta x_2 - \Delta x_3)] = 0 \quad [A.43]$$

Ovvero si deve avere contemporaneamente:

$$\Delta x_2 = n \frac{L}{2} \text{ e } \Delta x_3 = p \Delta x_2 \quad \text{con } n \text{ e } p = 1, 2, \dots \quad [A. 44]$$

Nel caso di quattro sonde ( $m=4$ ) si ha:

$$\left[ \frac{1}{4} + \frac{\exp(-2ik_1\Delta x_2)}{4} + \frac{\exp(-2ik_1\Delta x_3)}{4} + \frac{\exp(-2ik_1\Delta x_4)}{4} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{1}{4} + \frac{\exp(2ik_1\Delta x_2)}{4} + \frac{\exp(2ik_1\Delta x_3)}{4} + \frac{\exp(2ik_1\Delta x_4)}{4} \right] - 1 \quad [A. 45]$$

L'equazione [A.45] è verificata quando:

$$\begin{aligned} & \sin^2(k_1\Delta x_2) + \sin^2(k_1\Delta x_3) + \sin^2(k_1\Delta x_4) + \sin^2[k_1(\Delta x_2 - \Delta x_3)] + \\ & + \sin^2[k_1(\Delta x_3 - \Delta x_4)] + \sin^2[k_1(\Delta x_3 - \Delta x_4)] = 0 \end{aligned} \quad [A. 46]$$

ovvero deve essere contemporaneamente:

$$\Delta x_2 = n \frac{L}{2}, \Delta x_3 = p \Delta x_2, \Delta x_4 = q \Delta x_2 \text{ e } \Delta x_4 = r \Delta x_3 \quad \text{con } n, p, q, r = 1, 2, \dots \quad [A. 47]$$

#### Determinazione delle componenti di pulsazione $2\omega$

La stessa procedura descritta al paragrafo precedente può essere utilizzata anche per la determinazione delle ampiezze delle armoniche di ordine superiore. Al secondo ordine di approssimazione, tenendo conto dell'equazione [A.27] si ha:

$$F_2(x + \Delta x) = C_{(2)}^{I,B} X_{(2)}^{I,B} + C_{(2)}^{I,F} X_{(2)}^{I,F} + \Omega_m^{(2)} \quad [A. 48]$$

Dove:

$$\begin{cases} X_{(2)}^{I,B} = a_B^{(2)} \exp[-i(2k_1x)] \\ X_{(2)}^{I,F} = a_F^{(2)} \exp[-i(k_2x + \alpha_{F2})] \end{cases} \quad [A. 49]$$

$$\begin{cases} C_{(2)}^{I,B} = \frac{\exp(-i2k_1\Delta x_m)}{2} \\ C_{(2)}^{I,F} = \frac{\exp(ik_2\Delta x_m)}{2} \end{cases} \quad [A. 50]$$

$\Omega_m^{(2)}$  rappresenta l'armonica di frequenza  $2\omega$  della trasformata di Fourier della funzione  $e_m(t)$ .

Applicando ancora il metodo dei minimi quadrati, le equazioni per ricavare i coefficienti complessi incogniti saranno espresse come segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial X_{(2)}^{I,B}} \sum_m [\Omega_m^{(2)}]^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_{(2)}^{I,F}} \sum_m [\Omega_m^{(2)}]^2 = 0 \end{cases} \quad [A.51]$$

Sviluppando le derivate del sistema [A.51] si ottiene un sistema lineare nelle due incognite  $X_{(2)}^{I,B}$  e  $X_{(2)}^{I,F}$ .

Il generico sistema di equazioni risolto all'ordine  $n=2$  può essere scritto in forma matriciale nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{(1)}^{I,B} \\ X_{(1)}^{I,F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad [A.52]$$

Gli elementi  $A_{ij}$  e  $B_i$  possono, ancora una volta, essere espressi in funzione di  $C_{(2)}^{I,B}$  e  $C_{(2)}^{I,F}$  come di seguito riportato:

$$A_{11} = \sum_m [C_{(2)}^{I,B}]^2; A_{12} = A_{21} = \sum_m [C_{(2)}^{I,B} C_{(2)}^{I,F}]; A_{22} = \sum_m [C_{(2)}^{I,F}]^2 \quad [A.53]$$

$$B_1 = \sum_m [F_2(x + \Delta x) C_{(2)}^{I,B}]; B_2 = \sum_m [F_2(x + \Delta x) C_{(2)}^{I,F}] \quad [A.54]$$

Le ampiezze delle armoniche di secondo ordine possono essere determinate come segue:

$$a_B^{(2)} = |X_{(2)}^{I,B}|; \quad a_F^{(2)} = |X_{(2)}^{I,F}| \quad [A.55]$$

Così come descritto per la componente armonica fondamentale, il sistema [A.52] risulta indeterminato quando il determinante della matrice dei coefficienti  $A_{ij}$  è nullo e ciò, dunque, rappresenta un vincolo di posizionamento delle sonde di livello.



## Ringraziamenti

*Giunto al termine del presente lavoro desidero ringraziare ed esprimere la mia riconoscenza nei confronti di tutte le persone che, in modi diversi, sono state a me vicine durante il corso di Dottorato ed hanno permesso e incoraggiato sia i miei studi sia la realizzazione e stesura di questa tesi.*

*Desidero esprimere riconoscenza prima di ogni altro al mio tutor, il Prof. Mario Calabrese, per la fiducia datami fin dal primo giorno concedendomi la possibilità di intraprendere questo importante percorso di studi; egli ha costituito per me in questi anni una guida e un importante punto di riferimento, sia professionale che umano. Ringrazio il Prof. Edoardo Benassai il quale, oltre ad aver fornito il suo contributo leggendo criticamente il presente lavoro e fornendomi preziosi consigli, rappresenta colui che, con la sua passione e la sua esperienza, ha per primo trasmesso in me un profondo interesse per le materie di ingegneria marittima. Uno speciale ringraziamento va sicuramente all'Ing. Mariano Buccino con il quale ho lavorato a stretto contatto nell'attività di ricerca per tutti questi anni, che mi ha seguito e guidato con costanza ed infinita pazienza, mettendo a disposizione la sua conoscenza e le sue idee, indispensabili per il perfezionamento del mio lavoro di tesi e per la mia crescita professionale.*

*Ringrazio tutti i professori del Dipartimento con i quali ho avuto occasione di interagire ed in particolare il coordinatore di indirizzo del corso di Dottorato, il Prof. Guelfo Pulci Doria, il quale, con la sua sapienza e scrupolosità, ci ha costantemente guidati in questo percorso.*

*Ringrazio l'Ing. Pasquale Di Pace per i suoi consigli, la sua partecipazione e disponibilità al confronto. Ringrazio anche l'Ing. Francesco Pasanisi per avermi supportato nella raccolta di materiale scientifico per la stesura di questo lavoro.*

*Ringrazio tutti i colleghi del dipartimento e gli amici che mi hanno accompagnato in questo percorso tanto difficile quanto esaltante.*

*Le parole conclusive sono dedicate alla mia famiglia alla quale ho dedicato questo lavoro; ringrazio profondamente mia madre Giuliana e mio padre Carmine i quali mi hanno sempre supportato ed incoraggiato in tutte le mie scelte importanti ed ai quali sarò sempre riconoscente per le opportunità che mi hanno dato. Ringrazio tanto anche mia sorella Valentina la quale, pur essendo distante dalle mie esperienze professionali, condivide con me tutte le gioie, le speranze e le insicurezze della vita ed è sempre stata, e sempre sarà, il mio punto di riferimento indispensabile.*

## Lista dei Simboli

- $a$  : ampiezza dell'onda regolare di periodo  $T$ ;
- $a_F^{(2)}$  : ampiezza della componente armonica di pulsazione  $2\omega$ ;
- $a_{FT}^{(2)}$  : ampiezza della componente armonica libera trasmessa dietro l'ostacolo sommerso di pulsazione  $2\omega$ ;
- $a_F^{(3)}$  : ampiezza della componente armonica libera di pulsazione  $3\omega$ ;
- $a_{FT}^{(3)}$  : ampiezza della componente armonica libera trasmessa dietro l'ostacolo sommerso di pulsazione  $3\omega$ ;
- $a_B^{(2)}$  : ampiezza della componente armonica legata alla fondamentale di pulsazione  $2\omega$  (correzione di Stokes II);
- $a_{BT}^{(2)}$  : ampiezza della componente armonica legata alla fondamentale trasmessa dietro l'ostacolo sommerso di pulsazione  $2\omega$  (correzione di Stokes II);
- $a_T^{(3)}$  : ampiezza del disturbo di interferenza del III ordine;
- $a_{TT}^{(3)}$  : ampiezza del disturbo di interferenza del III ordine trasmesso dietro l'ostacolo sommerso;
- $b_{F2}$  : fattore di proporzionalità del II ordine definito da Goda (1998) nella teoria del generatore d'onda;
- $b_{F3}$  : fattore di proporzionalità del III ordine definito da Goda (1998) nella teoria del generatore d'onda;
- $g$  : accelerazione di gravità;
- $h$  : fondale al piede dell'opera;
- $k_s$  : numero riferito alla profondità di sommergenza ed alla pulsazione  $\omega$ ;
- $k_1$  : numero d'onda riferito alla profondità  $h$  che soddisfa la relazione di dispersione lineare con pulsazione  $\omega$ ;
- $k_n$  : numero d'onda riferito alla profondità  $h$  che soddisfa la relazione di dispersione lineare con pulsazione  $n\omega$ ;
- $k_s$  : numero d'onda calcolato sul coronamento della struttura (profondità  $R_c$ ) che soddisfa la relazione di dispersione lineare con pulsazione  $\omega$ ;
- $L$  : lunghezza d'onda al piede dell'opera;
- $n_1$  : coefficiente di proporzionalità tra celerità di gruppo e celerità di fase, riferito alla frequenza angolare  $\omega$ , nella teoria di Stokes II;
- $n_2$  : coefficiente di proporzionalità tra celerità di gruppo e celerità di fase, riferito alla frequenza angolare  $2\omega$ , nella teoria di Stokes II;
- $u$  : componente orizzontale del vettore velocità;
- $p$  : pressione totale;
- $\vec{v}$  : vettore velocità;

$w$  : componente verticale del vettore velocità;

$A_{n\omega}$  : ampiezza di Fourier di pulsazione  $n\omega$ ;

$B$  : larghezza della cresta della barriera;

$E$  : densità di energia meccanica media nel periodo  $T$ ;

$H_i$  : altezza d'onda incidente di target;

$H_{en,i}$  : altezza d'onda incidente misurata "globale";

$K_R$  :coefficiente di riflessione;

$K_T$  : coefficiente di trasmissione;

$P$  : flusso di energia medio nel periodo;

$T$  : periodo dell'onda incidente;

$U_r$  : numero di Ursell;

$X_p$  : posizione del battitore ideale in acque basse che produce uno sfasamento di  $-\pi$  tra la componenti di I e II ordine;

$[S]$  : frangimento di tipo *Spilling*;

$[P]$  : frangimento di tipo *Plunging*;

$[B]$  : frangimento di tipo *Bore*;

$[Sg]$  : frangimento di tipo *Surging*;

$[C]$  : frangimento di tipo *Collapsing*;

$[i-j]$ : frangimento intermedio tra i tipi  $i$  e  $j$  con  $i,j=\{[S], [P], [B], [Sg], [C]\}$ ;

$R_c$  : tirante idrico in corrispondenza della cresta dell'opera (positivo se quest'ultima è sommersa) calcolata rispetto al livello di quiete;

$\Delta X_{mis,p}$  : distanza tra la prima posizione di misura dell'elevazione d'onda ed il piede interno della struttura

$\alpha_{F2}^{mis}$  : lag di fase iniziale tra le componenti del I e II ordine calcolato rispetto alla prima posizione di misura;

$\alpha_{F2}^{piede}$  : lag di fase iniziale tra le componenti del I e II ordine calcolato rispetto all'origine al piede interno della struttura;

$\eta$  : superficie libera;

$\rho$  : densità del fluido;

$\bar{\sigma}_i$  : deviazione standard dell'elevazione d'onda incidente (in assenza di struttura) mediata attraverso le differenti posizioni di misura;

$\omega$  : frequenza angolare pari a  $2\pi/T$  ;

$\xi$  : spostamento orizzontale del generatore d'onda;

$\xi_0$  : semi ampiezza massima di spostamento del generatore d'onda in corrispondenza del pelo libero;

$\xi_s$  : spostamento del generatore d'onda in corrispondenza del pelo libero;

$\Phi$  : potenziale cinetico;

## Bibliografia

Basco, D., 1982. A qualitative description of wave breaking. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. 111, n. 2.

Bellotti, G., 2004. A simplified model of rip current systems. *Coastal Engineering*. Elsevier, Coastal Engineering, vol. 51, Issue 4, pp. 323-335;

Biéssel, F., 1951. Les Appareils Generateurs de Houle en Laboratoire. *Houille Blanche*, 6(2), 147 (1951a);

Briganti, R., Soldati, M., Contini, M., Sidoti, C., Franco, L., Lamberti, A. & Archetti, R., 2002. Inventario delle Opere di Protezione Costiera Semissommerse Parallele a Costa, Presenti in Italia. *Atti del 28° Convegno Nazionale di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Padova, pp. 235-242;

Brossard, J. and Chagdali, M., 2001. Experimental investigation of the harmonic generation by waves over a submerged plate. *Coastal Engineering*, vol. 42, pp. 277-290;

Brossard, J. and Hémon, A., 1995. Analyse spectral per effet Doppler de la propagation de la houle. *C. R. Acad. Sci. Paris 320 (Série IIb)* 171-176;

Buccino, M. and Calabrese, M., 2007. Conceptual approach for prediction of wave transmission at low-crested breakwaters. *J. Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 133(3), pp. 213-224;

Buccino M., Ciardulli F., Di Pace P., Calabrese M. (2008). Long periodic waves generated in a flume: theories and experimental data. *3rd International Short Conference On Applied Coastal Research*, 2-4 June 2008, Lecce (Italy);

Calabrese M., Buccino M., Ciardulli F., Di Pace P., Benassai E. (2008). The generation of periodic shallow water waves in a flume: results from small and large scale tests. *CoastLab*, Bari (Italy);

Calabrese, M., Buccino, M. e Pasanisi F., 2008. Wave breaking macrofeatures on a submerged rubble mound break water. *Journal of Hydro-environment Research*, vol. 1, Issues 3-4, pp. 216-225;

Calabrese, M., Pasanisi, F. and Buccino, M., 2006. Sull'interazione tra moto ondoso e barriere sommerse. *Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, sett. 2006, (Roma);

Calabrese, M., Vicinanza, D., Buccino, M., 2003. Large-scale experiments on the behavior of low crested and submerged breakwaters in presence of broken waves. *Proc., International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, Reston, Va., 1900-1912;

Calabrese, M., Vicinanza, D., Buccino, M., 2003. 2D wave set up behind low crested and submerged breakwaters. *Proceedings of the 13th International Conference ISOPE*, Honolulu, Hawaii;

Calabrese, M., Vicinanza, D., Buccino, M., 2008. 2D Wave Set-up behind submerged breakwaters. *Ocean Engineering*, vol. 35, Issue 10, July 2008, pp. 1015-1028;

Daemen, I.F.R., 1991. Wave transmission at low-crested structure. *Delft Hydraulic Rep. H462*, Msc Thesis, Delft Univ. of Technology, Delft, Netherlands;

- Dally, W.R., Dean, R.G. and Dalrymple R.A., 1985. Wave Height Variation Across Beaches of Arbitrary Profile. *Journal of Geophysical Research*, 90(C6), 11,917-11,927;
- d'Angremond, K., van der Meer, J.W., De Jong, R.J., 1997. Wave transmission at low-crested structures. *Proc. of International Conference of Coastal Engineering*, ASCE, 2418-2426;
- Dean R.G. & Dalrymple R.A., 1991. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. *World Scientific*;
- Diskin, M.H. et al. ,1970. Piling-up behind low and submerged permeable breakwaters". *J. Waterways and Harbours Division* , ASCE;
- Flick, R.E. and Guza, R.T., 1980. Paddle Generated Waves in Laboratory Channels. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Division*, pp. 79-97;
- Galvin, C.J., 1968. Breaker type classification on three laboratory beaches. *Journal of Geophysical Research*, vol. 73, n. 12, pp. 3651-3659;
- Goda, Y., 1997. Recurring Evolution of Water Waves Through Nonresonant Interactions. *Proceeding, 3rd Int. Symp. Ocean Wave Measurements and Analysis (WAVES '97)*, Virginia Beach, 1-23, ASCE.;
- Goda, Y. and Abe, Y., 1968. Apparent Coefficient of Partial Reflection of Finite Amplitude Waves. *Rep. Port and Harbour Res. Inst.*, 7(3);
- Goda, Y. and Ahrens, J.P., 2008. New formulation of wave transmission over and through low-crested structure. *Proc. of the 31th International Conference on Coastal Engineering*, ed Smith, pp. 3530-3545;
- Goda, Y. & Morinobu, K., 1998. Breaking Wave Heights on Horizontal Bed Affected by Approach Slope. *Coastal Engineering Journal*, vol 40, no. 4, pp. 307-326. World Scientific & Japan Society of Civil Engineers;
- Goda, Y., Okazaki, K. & Kagawa, M., 1999. Generation and Evolution of Harmonic Wave Components by Abrupt Depth Changes. *Proc. Coastal Structures '99*, pp. 649-658. Balkema;
- Goda, Y. and Suzuki, Y., 1976. Estimation of incident and reflected waves in random wave experiments. *Proc. of the 15<sup>th</sup> Coastal Engineering Conference*. ASCE, New York, pp. 828-845;
- Gómez Pina, G. G. and Valdés Fernandes de Alarcon, J. M., 1990. Experiment on coastal protection submerged breakwaters: a way to look at the result. *Coastal Engineering*, chapter 119, pp. 1593-1605;
- Grue, J., 1992. Nonlinear Water Waves at a Submerged Obstacle or Bottom Topography. *Journal of Fluid Mechanics*. cod. 244 pp. 455 - 476;
- Harris, J.F., 1978. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. *Proc. IEEE*, vol. 66, n.1, pp. 51-82;
- Hudson, R. Y., Herrmann, F. A., Sager, R. A., Whalin, R.W., Keulegan, G. H., Chatham, C. E. and Hales, L. Z., 1979. *Coastal Hydraulic Models*, Special Report N. 5. US Army Engineer Waterways Experiment Station. Vicksburg (Mississippi);
- Hughes, S.A., 1993. Physical Models and Laboratory Techniques in Coastal Engineering. *World Scientific*;

Keulegan, G. H., 1973. Wave Transmission Through Rock Structure. Research Report H-173. *US Army Engineer Waterways Experiment Station*. Vicksburg (Mississippi);

Kawasaki and Iwata, 2001. Wave breaking-induced dynamic pressure due submerged breakwater. *International Offshore and Polar Engineering Conference*, Stavanger, Norway, June 2001, pp. 488-491;

Le Méhauté, B., 1965. Wave Absorbers In Harbours. Contract Report N. 2-122. *US Army Engineer Waterways Experiment Station*. Vicksburg (Mississippi);

Le Méhauté, B., 1976. Similitude in Coastal Engineering. *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*. American Society of Civil Engineering, Vol. 102, N. WW3, pp. 317-335;

Lamb, H., 1932. *Hydrodynamics*. Dover;

Lin, C-Y and Huang, C-J, 2004. Decomposition of Incident and Reflected Higher Harmonic Waves Using Four Gauges. *Coastal Engineering* 51, pp. 395-406;

Losada, I.J., Patterson, M.D. and Losada M.A., 1997. Harmonic Generation Past a Submerged Porous Step. *Coastal Engineering*, n. 31, pp. 281-304. Elsevier;

Loveless, J.H., Debski, D., MacLeod, A.B., 1998. Sea level set-up behind detached breakwaters. *Coastal Engineering*, pp 1665-1678;

Madsen, O.S., 1971. On The Generation of Long Waves. *Journal of Geophysical Research*, vol. 76, no. 36;

Mansard, E.P. and Funke, E.R., 1980. The measurement of incident and reflected spectra using a least squares method. Proc. of the 17<sup>th</sup> Coastal Engineering Conference. ASCE, New York, pp. 154-172;

Massel, S.R., 1983. Harmonic Generation by Waves Propagating Over a Submerged Step. *Coastal Engineering*, n. 7, pp. 357-380. Elsevier;

Ono, N. et al., 1998. Experiment on Stabilizing Mechanism of Beach Profile. *Proc. Of the 45<sup>th</sup> Japanese Conf. on Coastal Engineering*, JSCE, Tokyo, 501-505;

Panizzo, A., Briganti, R., "Analysis of wave transmission behind low-crested breakwaters using neural networks", *Coastal Engineering*, 2007;

Pasanisi F., Buccino, M and Calabrese, M. 2007. Macrofeatures and engineering properties of wave breaking at submerged breakwaters. *Coastal Structures* 2007;

Patarapanich, M. and Cheong, H.F., 1989. Reflection and transmission characteristics of regular and random waves from a submerged horizontal plate. *Coastal Engineering*, vol. 13, pp. 161-182;

Stive, M. J. F., 1985. A scale comparison of waves breaking on a beach. *Coastal Engineering*, vol. 9, Issue 2, pp.151-158;

Seabrook, S.R. and Hall, K.R., 1999. Wave transmission at submerged rubble mound breakwaters. *Coastal Engineering* (1998), B.L. Edge, ed., ASCE, Reston, Va., 2000-1013;

Svendsen, I.A., 1985. Physical Modelling of Water Waves. In: *Physical Modelling in Coastal Engineering*, pp. 13-47, R.A. Dalrymple Ed. Balkema;

van der Meer, J.W., 1992. Conceptual Design of Rubble Mound Breakwaters. *Proc. Short Course on Design and Reliability of Coastal Structures*, Venezia, pp. 447-510. ASCE;

van der Meer, J.W., Briganti, R., Zanuttigh, B. and Wang, B., 2005. Wave transmission and reflection at low-crested structures: Design formulae, oblique wave attack and spectral change. *Coastal Engineering*, 52 (10-11), 915-929;

Van Oosten, R., J. Peixoto Marco, J.W. van der Meer and H.J. Verhagen, 2006. Wave transmission at low-crested structures using neural networks. *ASCE, ICCE 2006*, San Diego;

Wamsley, T.V. and Ahrens, J.P., 2003. Computation of wave transmission coefficients at detached breakwaters for shoreline response modeling. *Coastal Structures 2003*, J.A. Melby, ed., ASCE, Reston, Va., 593-605;

Yamashiro, M., Yoshida, A. and Irie, I., 1999. Experimental study on wave behind a submerged breakwater. *Coastal Structures '99*, Losada, ed., ASCE, Belkema, Rotterdam, pp. 675-682;

Zelt and Skjelbreia, 1992. J.A. Zelt and J.E. Skjelbreia, Estimating incident and reflected wave fields using an arbitrary number of wave gauges. *Proc. 23th International Coastal Eng. Conf.* (1992).

Zhao, S., Wang, F., Xu, H., Zhu, H., 2009. Multi-frequency identification method in signal processing. *Digital Signal Processing*, vol. 19, pp. 555-566.